

# Matemáticas

SECUNDARIA

3

Cuaderno de

**A**prendizajes

**F**undamentales

**I**mprescindibles



**EDUCACIÓN**

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

**Estimada alumna, estimado alumno:**

El *Cuaderno de Aprendizajes Fundamentales Imprescindibles. Matemáticas 3* que tienes en tus manos es el resultado del esfuerzo que realizan el gobierno federal, los gobiernos estatales, las maestras y los maestros de México para garantizar que todas las niñas, los niños y los adolescentes que cursan la educación básica en nuestro país cuenten con materiales educativos para construir su aprendizaje, y con ello alcanzar una educación de excelencia.

Este material surge en un contexto de emergencia sanitaria mundial derivado de la epidemia de la covid-19, y tiene como propósito acompañarte durante las primeras semanas de tu curso escolar en la revisión de los aprendizajes fundamentales del ciclo escolar anterior con la finalidad de asegurar que hayas adquirido los saberes imprescindibles para acceder con éxito a los nuevos conocimientos y habilidades correspondientes al grado que cursas.

En este cuaderno se incluyen diversas actividades para trabajar dentro y fuera del aula, las cuales, además, se pueden adaptar fácilmente a las condiciones de la escuela y a las restricciones sanitarias que pudieran presentarse. Por ello, también encontrarás propuestas de trabajo con tu familia y amigos, de tal manera que puedas aplicar tus saberes en diferentes situaciones.

Si bien esta propuesta corresponde al inicio del ciclo escolar, tu maestro podrá ir graduando las actividades conforme a las necesidades de tu grupo y utilizarlas en el momento que lo considere más conveniente.

En el marco de la Nueva Escuela Mexicana, la equidad y la calidad son las premisas de la educación. Este Cuaderno forma parte de los materiales educativos que se ofrecen para que, con el trabajo diario de maestras, maestros, autoridades y familias, alcances el máximo logro de aprendizaje y el fortalecimiento de los lazos entre tu escuela y tu comunidad.

Este Cuaderno ya es tuyo, es un regalo del pueblo de México para ti.

¡Conócelo, cuídalo y disfrútalo!

**Distribución gratuita, prohibida su venta.**

# Matemáticas

Cuaderno de Aprendizajes Fundamentales Imprescindibles

SECUNDARIA

3



**EDUCACIÓN**  
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

**Matemáticas 3. Cuaderno de Aprendizajes Fundamentales Imprescindibles. Secundaria**

fue elaborado en coedición por la Secretaría de Educación Pública y la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana.

**Secretaría de Educación Pública**

Delfina Gómez Álvarez

**Subsecretaría de Educación Básica**

Martha Velda Hernández Moreno

**Dirección General de Materiales Educativos**

Marx Arriaga Navarro

**Selección y revisión técnico-pedagógica de los Aprendizajes Fundamentales Imprescindibles**

Raquel Bernabe Ramos, Denisse Ossiris Hernández Carbajal,  
Juan Manuel Martínez García, Benjamín Martínez Navarro,  
José Luis Mejía Rodríguez, Felipe de Jesús Matías Torres,  
Gil Arturo Saavedra Mercado.

**Diseño de la colección de nivel Secundaria**

Alicia Calvo Mora, Paola Sanabria López, CANIEM

**Coordinación editorial**

SM de Ediciones, S. A. de C. V.

**Evaluación diagnóstica**

Benjamín Martínez Navarro

**Autores**

Rubén García Madero, María Antonieta Molina Garza Galindo,  
Anne Marie Pierre Alberro Semerena, Apolo Castañeda Alonso,  
Rosa Isela González Polo, Pilar Martínez Téllez,  
Guadalupe Carrasco Licea, Demetrio Garmendia Guerrero,  
Javier Ángeles A. y Carlos Bosch Giral

Primera edición, 2021 (ciclo escolar 2021-2022)

D. R. © Secretaría de Educación Pública, 2021

Argentina 28, Centro,  
06020, Ciudad de México

D. R. © Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, 2021

Holanda 13, San Diego Churubusco,  
C. P. 04120, Coyoacán, Ciudad de México

ISBN SEP: 978-607-551-551-9

ISBN CANIEM: 978-607-97523-8-5

Prohibida la reproducción o transmisión parcial o total de esta obra por cualquier medio o método y en cualquier forma electrónica o mecánica, incluso fotocopia o sistema para recuperar información, sin permiso escrito del editor.

Impreso en México

DISTRIBUCIÓN GRATUITA – PROHIBIDA SU VENTA

# CONOCE TU CUADERNO

**Evaluación diagnóstica**  
Planteamientos para reconocer qué tanto aprendiste en tu curso anterior en la asignatura de Matemáticas 2.

**Evaluación diagnóstica**  
Analiza cada problema y selecciona la opción que se relaciona correctamente con su resolución.

1. Un móvil viaja en línea recta a 11.9 m/s, cambia su velocidad y tarda en detenerse 7.65 segundos, ¿cuál es el valor de la aceleración?

I.  $a = \frac{v_f - v_i}{t} = \frac{0 - 11.9}{7.65} = -1.555 \frac{m}{s^2}$

II.  $a = \frac{v_f - v_i}{t} = \frac{0 - 11.9}{7.65} = -1.555 \frac{m}{s^2}$

III.  $a = \frac{v_f - v_i}{t} = \frac{0 - 11.9}{7.65} = -1.555 \frac{m}{s^2}$

IV.  $a = \frac{v_f - v_i}{t} = \frac{0 - 11.9}{7.65} = -1.555 \frac{m}{s^2}$

A) I  
B) II y IV  
C) III  
D) II

2. ¿Cuánto mide el radio de un círculo cuya área es  $A = 9.40\pi$  unidades cuadradas?

I. 88.529 285 unidades.  
II. 93 unidades.  
III. 97 unidades.  
IV. Entre 94 y 96 unidades.

A) I  
B) II  
C) III  
D) IV

## Título de la ficha

**FICHA 7**  
**Entre líneas y curvas I**

**Aprendizaje fundamental imprescindible:** Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de su representación tabular, gráfica y expresiones algebraicas. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.

**Contenido específico:** Analiza y compara situaciones de proporcionalidad inversa a partir de su representación tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.

**Materiales:**  
✓ Libro de texto de Matemáticas 2  
✓ Cuaderno y lápiz.  
✓ Regla o escuadra.  
✓ Calculadora.  
✓ Equipo de cómputo, celular o tabletas con acceso a internet.

**Lee los problemas y responde.**  
a) Al variar la longitud de los lados de un cuadrado, su perímetro cambia.  
• Completa la tabla.

Lado (cm)	2	4	6	8	10
Perímetro (cm)					

• ¿Cómo se puede saber si dos magnitudes varían proporcionalmente?  
• ¿El perímetro y el lado son magnitudes directamente proporcionales?

b) Para hacer una excursión escolar, se contrata el servicio de un autobús por el que se deben pagar \$1600.00.  
• Si han anotado 28 alumnos para ir a la excursión, ¿cuánto pagará cada alumno por el transporte?  
• Si asisten más alumnos, ¿el monto que cada uno debe pagar por transporte aumenta o disminuye?  
• ¿Cuánto pagaría cada uno si fueran 33 alumnos?, y si fueran 40?  
• ¿La cantidad de alumnos y la cantidad por pagar del transporte son magnitudes directamente proporcionales?  
• Explica en qué te basaste para responder la pregunta anterior.

1. Lee la información y haz lo que se pide.  
Ricardo quiere saber cuántos galones de pintura debe comprar para pintar veintiocho metros de 100 m<sup>2</sup> y cuántos metros debe contratar, considerando que todos trabajarán al mismo ritmo. Sabe que con cuatro galones se pueden pintar 3x m<sup>2</sup> de pared, aplicando dos manos de pintura, y que un solo pintor tardará 30 días en hacer el trabajo.

**Identificador**  
Indica el Aprendizaje Fundamental Imprescindible (AFI), los materiales a utilizar y los contenidos que trabajarás en la ficha.

**A usar tu cuaderno**  
Te invita a explorar lo que sabes del tema que se aborda.



**Manos a la obra**  
Planteamientos que te ayudarán a retomar saberes del grado anterior con el fin de lograr los propósitos de la ficha.

**FICHA 8**

La relación entre magnitudes inversamente proporcionales se utiliza para modelar fenómenos de la física y otros contextos, así como en distintos contextos sociales, económicos y empresariales.

Para identificar si un problema planteado en cualquier contexto corresponde o no a una relación de proporcionalidad inversa, puedes hacer lo siguiente:

1. Analiza el enunciado hasta que lo tengas totalmente claro.
2. Identifica las magnitudes involucradas.
3. Registra los datos proporcionados.
4. Verifica si se cumple que el producto de las magnitudes es constante (o si se dan una gráfica, verifica si el producto de los valores de las coordenadas de los puntos es constante).

1. Consulta las páginas de tu libro de texto de Matemáticas 2 en las que se resuelven problemas que se modelan con variaciones de proporcionalidad inversa, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos. Luego, reflexiona y contesta.

• ¿Cómo es la gráfica de una variación de proporcionalidad inversa?  
• ¿En qué otros contextos se resuelven problemas de variación de proporcionalidad inversa en tu libro de texto?

2. Ingresar en el sitio [http://recursositioeducacion.es/secundaria/edad2/matematicas/2/2016/matem2\\_2\\_4.htm](http://recursositioeducacion.es/secundaria/edad2/matematicas/2/2016/matem2_2_4.htm), selecciona "Regla de tres inversa" en "Proporcionalidad inversa". Analiza la información que presenta la página, el problema planteado y la solución. ¿Por qué la relación entre las magnitudes es inversamente proporcional?

3. Resuelve y entrega tus respuestas al profesor para que evalúe tu aprendizaje.  
La máquina de un tranvía doce vagones alcanza, en promedio, una rapidez de 87.5 km/h, pero cuando a la misma máquina le colocan quince vagones alcanza una rapidez promedio de 60 km/h.

a) ¿Cuáles son las magnitudes involucradas en el planteamiento del problema?  
b) ¿La relación entre las magnitudes es directamente proporcional?, ¿por qué? ¿Es una relación de proporcionalidad inversa?, ¿por qué?  
c) ¿Qué rapidez promedio alcanzaría la misma máquina con veintiocho vagones?

4. Juega con un compañero a la batalla de magnitudes.  
Por turnos, un compañero elige y dice una magnitud y el otro gana un punto si encuentra otra que sea directamente proporcional y gana dos puntos si encuentra una inversamente proporcional a la que el compañero eligió. Jueguen cinco rondas. Gana quien obtenga 10 o más puntos.

5. Ahora juega con tus familiares y amigos a la batalla de magnitudes. Explicales las reglas y con lo que aprendiste en esta ficha y la 7, orienta a tus contrincantes de juego sobre magnitudes directas e inversamente proporcionales.



**Para aprender más**  
Información que amplía o complementa tu aprendizaje.



**Abre tu libro de texto**  
Invita a consultar tu libro de texto del año anterior para realizar planteamientos.



**Qué aprendí**  
Planteamientos para reflexionar sobre tu desempeño y reconocer lo que te hace falta por aprender.

**A divertirnos**  
Planteamientos lúdicos que complementan o consolidan tu aprendizaje.



**A compartir**  
Planteamiento que propicia la comunicación y la aplicación de lo aprendido con tus familiares, tutores o la comunidad.



**FICHA 9**

1. Consulta las páginas de tu libro de texto de Matemáticas 2 en las que se plantea el tema "Figuras geométricas y expresiones algebraicas" y contesta.

• Si  $6x^2 - 12x$  es la expresión algebraica para el perímetro de un hexágono regular, ¿cuánto mide su lado?  
• Si  $xy - 2x$  es la expresión algebraica para el área de un rectángulo, ¿cuánto miden sus lados? ¿a solución es única?

2. Analiza la figura, cuya medida de los lados está dada en centímetros, y contesta. Entrega el trabajo a tu profesor para que lo evalúe.

a) Escribe una expresión algebraica que permita encontrar el perímetro de la figura.  
b) Escribe dos expresiones algebraicas que permitan encontrar el área de la figura: una como el producto de las dimensiones de su largo y su ancho, y la otra, como la suma de las áreas de las figuras que la conforman.

3. Resuelve el acertijo.  
• Al cortar de cada cuadrilátero que conforma el rectángulo mayor, se escribió la expresión que corresponde a su área. Encuentra una expresión algebraica para el perímetro del rectángulo mayor y otra para el área.

6x	5c	6x
5a	25	5a

4. Divide la superficie del rectángulo e indica las dimensiones correspondientes en la figura de manera que las expresiones:  $x^2 + b = 11y$  y  $x^2 + a + 1$  correspondan a su área y perímetro, respectivamente. Intercambia tu trabajo con una pareja y revisa la pertinencia de la subdivisión.

Conoce tu cuaderno .....	3
Evaluación diagnóstica .....	5
<b>Ficha 1.</b> Multiplicación de números positivos y negativos .....	9
<b>Ficha 2.</b> División de números positivos y negativos .....	13
<b>Ficha 3.</b> Reglas de potencias .....	17
<b>Ficha 4.</b> Aproximación de raíces cuadradas .....	21
<b>Ficha 5.</b> Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y su solución gráfica .....	23
<b>Ficha 6.</b> Métodos para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas .....	27
<b>Ficha 7.</b> Entre líneas y curvas .....	31
<b>Ficha 8.</b> Aplica la proporcionalidad inversa .....	36
<b>Ficha 9.</b> Perímetro y área de figuras geométricas y expresiones algebraicas .....	39
<b>Ficha 10.</b> Equivalencia de expresiones algebraicas .....	43
<b>Ficha 11.</b> Un mundo tridimensional .....	47
<b>Ficha 12.</b> Prismas y cilindros .....	50
<b>Ficha 13.</b> Medidas de tendencia central, rango y desviación .....	53
<b>Ficha 14.</b> Probabilidad teórica .....	59

## Evaluación diagnóstica

Analiza cada problema y selecciona la opción que se relaciona correctamente con su resolución.

1. Un móvil viaja en línea recta a 11.9 m/s, cambia su velocidad y tarda en detenerse 7.65 segundos, ¿cuál es el valor de la aceleración?

I. 
$$a = \frac{v_f - v_i}{t} = \frac{0 - 11.9}{7.65} = \frac{-\frac{119}{10}}{\frac{765}{100}} = \frac{-119}{10} \times \frac{100}{765} = \frac{-11900}{7650} \approx -1.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

II. 
$$a = \frac{v_f - v_i}{t} = \frac{0 - 11.9}{7.65} = \frac{-\frac{119}{10}}{\frac{765}{100}} = \frac{-119}{10} \times \frac{100}{765} = \frac{-91035}{1000} = -91.035 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

III. 
$$a = \frac{v_f - v_i}{t} = \frac{0 - 11.9}{7.65} = \frac{-\frac{119}{10}}{\frac{765}{100}} = -119 \times 765 = 91035 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

IV. 
$$a = \frac{v_f - v_i}{t} = \frac{0 - 11.9}{7.65} = \frac{-\frac{119}{10}}{\frac{765}{100}} = \frac{-91035}{1000} = 91.035 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- A) I
- B) II y IV
- C) II
- D) III

2. ¿Cuánto mide el radio de un círculo cuya área es  $A = 9\,409\pi$  unidades cuadradas?

- I. 88 529 281 unidades.
- II. 93 unidades.
- III. 97 unidades.
- IV. Entre 94 y 96 unidades.

- A) I
- B) II
- C) III
- D) IV





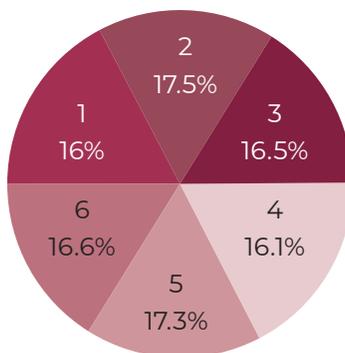
7. En la siguiente tabla se muestra el tiempo que algunos pacientes tuvieron que esperar para ser atendidos en dos clínicas diferentes. ¿En qué clínica es más eficiente la atención en relación con el tiempo de espera?

	Tiempo de espera (min)									
Clínica A	25	26	27	28	29	30	25	26	27	28
Clínica B	25	27	25	29	27	27	26	26	29	30

- I. En la A porque la desviación media del conjunto de datos es menor que la del B.
- II. En la A porque el rango del conjunto de datos es menor que el del B.
- III. En la B porque la media del conjunto de datos es mayor que la del A.
- IV. En la B porque la desviación media del conjunto de datos es mayor que la del A.

- A) I
- B) II
- C) III
- D) IV

8. La siguiente gráfica muestra la probabilidad frecuencial que se obtuvo al efectuar 100 000 lanzamientos de un dado de 6 caras. Selecciona la afirmación o afirmaciones correctas.



- I. La probabilidad frecuencial se aleja de la probabilidad teórica.
- II. 16 lanzamientos cayeron en la cara del 1.
- III. 83 900 lanzamientos no cayeron en la cara del 4.
- IV. La probabilidad teórica de caer 5 en el dado es de  $1/6$ .

- A) I y II
- B) III y IV
- C) I y III
- D) Únicamente IV

# Multiplicación de números positivos y negativos

**Aprendizaje fundamental imprescindible.** Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.

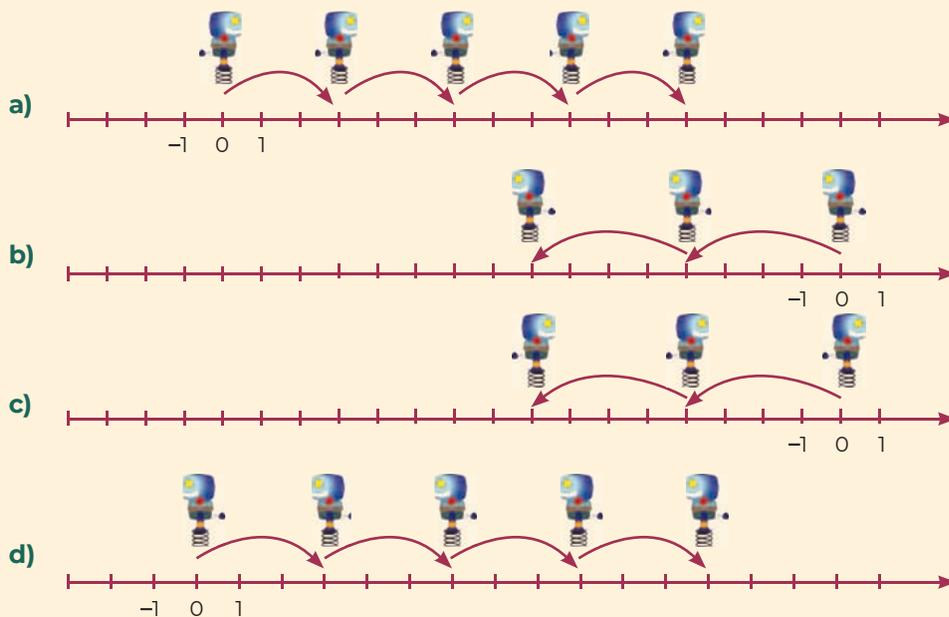
**Contenido específico.** Resuelve problemas de multiplicación con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.

## Materiales

- ✓ Libro de texto de Matemáticas 2.
- ✓ Hojas de cuadro chico.
- ✓ Lápices.
- ✓ Calculadora.
- ✓ Regla.
- ✓ Goma.

Un robot salta sobre una recta numérica iniciando en el cero. Las reglas del juego son las siguientes: si mira hacia tu mano derecha, la longitud de cada salto se expresa con un número positivo y, si mira hacia tu mano izquierda, con un número negativo. También: si salta de frente (o sea, en la dirección que está mirando), el número de saltos se expresa con un número positivo, y si salta de espaldas (es decir, en la dirección contraria a la que está mirando), el número de saltos se considera con un número negativo.

Observa los siguientes saltos del robot, su posición final en cada caso y contesta en tu cuaderno las preguntas.



- ¿Cuál es la longitud de cada salto? De acuerdo a las reglas del juego, ¿se expresa con un número positivo o negativo?
- ¿Cuál es el número de saltos? ¿Se expresa con un número positivo o negativo?
- Con base en las respuestas a las preguntas anteriores, ¿cómo obtendrías la posición final del robot? Descríbelo con palabras.
- ¿Cómo representarías las situaciones del inciso a) y b) como una suma? ¿Y como una multiplicación?
- ¿Qué similitudes y diferencias encuentras entre los incisos a) y d) y los incisos b) y d)?



**1. Retoma el juego del robot; representa cada caso con una multiplicación y responde.**

- 3 saltos de frente, de 8 unidades, mirando hacia la izquierda.
- 8 saltos de espaldas, de 3 unidades, mirando hacia la derecha.
- 5 saltos de espaldas, de 6 unidades, mirando hacia la derecha.
- 6 saltos de frente, de 5 unidades, mirando hacia la izquierda.
  - ¿En qué casos el robot llegó al mismo lugar?
  - ¿Qué multiplicaciones tienen los mismos factores?

**2. Completa las tablas con los resultados de las multiplicaciones y contesta.**

$(6)(3)$	18
$(6)(2)$	
$(6)(1)$	
$(6)(0)$	
$(6)(-1)$	-6
$(6)(-2)$	
$(6)(-3)$	

$(3)(6)$	
$(2)(6)$	12
$(1)(6)$	
$(0)(6)$	
$(-1)(6)$	
$(-2)(6)$	
$(-3)(6)$	

- Al multiplicar un número positivo por uno negativo, ¿el resultado es un número positivo o un número negativo?
- ¿Cuál es la diferencia entre las expresiones de la primera columna de cada tabla?
- ¿Cuál es la diferencia entre los números de la segunda columna de cada tabla?
- Explica por qué en una multiplicación el orden de los factores no altera el producto.

**3. La multiplicación es una suma abreviada de sumandos iguales. Con base en las tablas de multiplicar que conoces, completa las tablas y contesta.**

$(-9)(4) =$	
$(-9)(3) =$	
$(-9)(2) =$	
$(-9)(1) =$	
$(-9)(0) =$	
$(-9)(-1) =$	
$(-9)(-2) =$	
	27
	36

	20
$(-5)(-3) =$	
$(-5)(-2) =$	
$(-5)(-1) =$	
$(-5)(0) =$	
$(-5)(2) =$	
	-15
	-20

- ¿Qué tienes que hacer para pasar del resultado de  $(-9)(0)$  al resultado de  $(-9)(-1)$ ?
- ¿Qué tienes que hacer para pasar del resultado de  $(-5)(-3)$  al resultado de  $(-5)(-2)$ ?
- ¿De cuánto en cuánto aumentan o disminuyen los valores de la primera sucesión?  
¿Y los de la segunda?
- Al multiplicar dos números positivos, ¿el resultado es un número positivo o un número negativo? ¿Y al multiplicar dos números negativos?

## 4. Completa el siguiente cuadro de multiplicaciones.

$\times$	-1	4	-2.3	$-\frac{3}{8}$
2	-2			
$\frac{2}{3}$		$\frac{8}{3}$		
-1.7				
-8				3

## 5. Escribe cada número como la multiplicación de dos números y contesta.

-11 =

$\frac{12}{30} =$

-2.5 =

11 =

36 =

De los números anteriores...

- ¿Cuáles se pueden escribir como la multiplicación de dos números negativos?
- ¿Cuáles se pueden escribir como la multiplicación de un número positivo por un negativo?
- ¿Cuáles tienen sólo dos formas de expresarse como la multiplicación de dos números?

## 6. Selecciona el resultado correcto para cada multiplicación.

•  $(-7)(8)(3) =$

168

-168

•  $(1.4)(-\frac{1}{3})(-3) =$

1.4

-1.4

•  $(\frac{7}{4})(-\frac{3}{2})(\frac{4}{3}) =$

 $3\frac{1}{2}$  $-3\frac{1}{2}$ 

•  $(-7)(-0.5)(-4) =$

14

-14

•  $(-0.2)(5)(4\frac{1}{2})(-2) =$

9

-9

## 7. Analiza y contesta.

- Si en una multiplicación la cantidad de factores negativos es un número par, ¿el producto será un número positivo o un número negativo?
- Si en una multiplicación la cantidad de factores negativos es un número impar, ¿el producto será un número positivo o un número negativo?

En una **multiplicación** de dos números enteros...

- El resultado (producto) es un **número positivo** si ambos factores son números positivos o ambos factores son números negativos.
- El resultado (producto) es un **número negativo** si uno de los factores es un número positivo y el otro un número negativo.



Consulta las páginas de tu libro de texto de Matemáticas 2 en las que se plantea el tema “Multiplicación de números positivos y negativos” y contesta.

- ¿Por qué número tienes que multiplicar a 8 para obtener su opuesto o simétrico?
- ¿Por qué número tienes que multiplicar a  $-2.3$  para obtener su simétrico?
- ¿Por qué número tienes que multiplicar a  $-9$  para obtener el simétrico de  $-36$ ?



Lee y contesta. Entrega el trabajo a tu profesor para que lo evalúe.

a) Considera el juego del robot.

- Dibuja de dos formas distintas la manera en que el robot puede llegar al 5 dando saltos de una unidad. Representa las situaciones como una multiplicación.
- Dibuja de dos formas distintas la manera en que el robot puede llegar al  $-12$  dando saltos de dos unidades. Representa las situaciones como una multiplicación.

b) Resuelve las siguientes operaciones.

- $-\frac{3}{4} + (-\frac{3}{2})(-\frac{3}{2}) =$  \_\_\_\_\_
- $5(3 - 17 + 4)(-\frac{2}{5}) =$  \_\_\_\_\_
- $(6)(-11) + (8 - 12 - 6 + 4)(3 - 1.5) =$  \_\_\_\_\_



Escribe el resultado de las siguientes multiplicaciones. Considera que (+) representa un número positivo y que (-) representa un número negativo.

- (+) (+) = \_\_\_\_\_
- (+) (-) (+) = \_\_\_\_\_
- (-) (+) (+) (-) = \_\_\_\_\_
- (-) (-) = \_\_\_\_\_
- (-) (-) (-) = \_\_\_\_\_
- (-) (+) (-) (-) = \_\_\_\_\_
- (-) (-) (+) = \_\_\_\_\_
- (+) (+) (+) = \_\_\_\_\_
- (+) (+) (+) (-) = \_\_\_\_\_



Resuelve las siguientes adivinanzas, compara tus respuestas con las de tus compañeros y compártelas con tu familia.

a) Soy un número que al multiplicarlo por  $-4$  se obtiene  $-72$ . ¿Quién soy?

\_\_\_\_\_

b) Al multiplicar dos números se obtiene  $-132$  y al sumarlos  $-16$ . ¿Qué números son?

\_\_\_\_\_

c) La multiplicación de tres números es  $-22$ . ¿Qué números son? ¿La respuesta es única?

\_\_\_\_\_



Ingresa a la página: [cmed.mx/m24](http://cmed.mx/m24), elige “Multiplicar”, “Sencillo” y “Negativos” y resuelve los ejercicios. Puedes cambiar a “Triple” y elevar el nivel de dificultad.

## División de números positivos y negativos

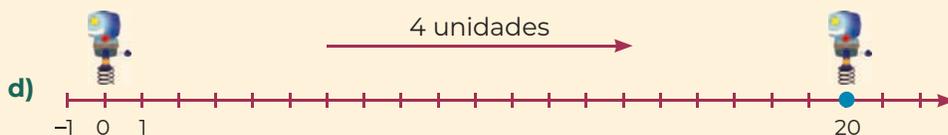
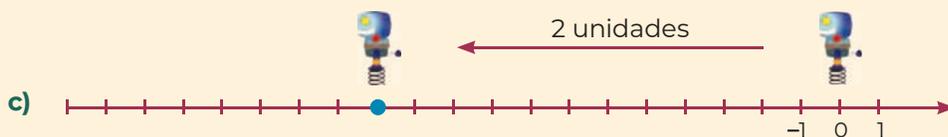
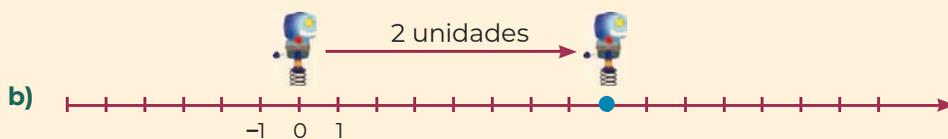
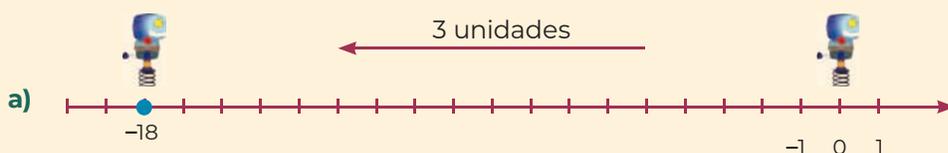
**Aprendizaje fundamental imprescindible.** Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.

**Contenido específico.** Resuelve problemas de división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.

### Materiales

- ✓ Libro de texto de Matemáticas 2.
- ✓ Hojas de cuadro chico.
- ✓ Lápices.
- ✓ Calculadora.
- ✓ Regla.
- ✓ Goma.

Considera las reglas del juego del robot. Las flechas indican la dirección del movimiento y en cada recta se indicó la longitud de los saltos sin tener en cuenta si se expresa con un número negativo o uno positivo. Analiza y contesta.



- ¿En qué casos las longitudes de los saltos se expresan con números negativos o positivos y por qué?
- ¿Cuál es la longitud en cada caso? Exprésala con un número positivo o uno negativo, según las reglas del juego del robot.
- ¿En qué casos el número de los saltos se expresa con un número negativo o con uno positivo y por qué?
- ¿Cuál es el número de saltos en cada caso? Exprésalo con un número positivo o uno negativo, según las reglas del juego del robot.
- Describe con palabras cómo obtendrías el número de saltos que da el robot por medio de una división.
- Escribe la división que corresponde a cada caso.



1. Completa la tabla.

Salta de... (valor)	Mirando hacia la...(valor)	Punto al que llega	División	Multiplicación
Frente (+4)	Derecha (+8)	32	$32 \div 8 = 4$	$4 \times 8 = 32$
	Derecha (+7)	-35		
	Izquierda (-9)	-54		
	Izquierda (-7)	21		
Frente (+12)		-72		
Espaldas (-5)				$-5 \times 6 = -30$

2. Analiza y contesta en tu cuaderno..

- a) Al multiplicar un número por  $-8$  se obtiene  $-152$ . ¿Qué división permite encontrar el número que falta? ¿Cuál es ese número?
- b) Al dividir un número entre  $7$  se obtiene  $-7$ . ¿De qué número se trata?
- c) ¿Qué número si se divide entre  $-10$  es igual a  $12$ ?
- d) Si en una división los dos números son negativos, ¿el resultado es positivo o negativo?
- e) Y si uno es positivo y el otro negativo, ¿el resultado es positivo o negativo?

En una **división** de dos número enteros...

- El resultado (cociente) es **un número positivo** si ambos números son positivos o ambos son negativos.
- El resultado (cociente) es **un número negativo** si uno de los números es positivo y el otro negativo.

3. Resuelve las siguientes divisiones.

- a)  $216 \div (-12) =$  \_\_\_\_\_
- b)  $-\frac{2}{5} \div 2.5 =$  \_\_\_\_\_
- c)  $-4.5 \div (-2) =$  \_\_\_\_\_
- d)  $-\frac{1}{2} \div (-8) =$  \_\_\_\_\_
- e)  $-\frac{3}{4} \div 2\frac{1}{3} =$  \_\_\_\_\_
- f)  $-210 \div (-10) =$  \_\_\_\_\_

4. Escribe F si la afirmación es falsa y V si es verdadera.

- a) Al dividir  $-15$  entre  $3$  se obtiene lo mismo que al dividir  $15$  entre  $-3$  \_\_\_\_\_
- b) Al dividir  $-15$  entre  $3$  se obtiene lo mismo que al dividir  $3$  entre  $-15$  \_\_\_\_\_
- c) Al dividir  $-24$  entre  $-8$  se obtiene lo mismo que al dividir  $24$  entre  $8$  \_\_\_\_\_
- d) Al dividir  $-3$  entre  $4$  se obtiene lo mismo que  $3$  entre  $-4$  que a su vez es igual a la fracción  $-\frac{3}{4}$ . \_\_\_\_\_

5. Aplica la jerarquía de operaciones y resuelve. Escribe en tu cuaderno paso a paso el procedimiento.

- a)  $-90 \div (6 \times (-9) + 24) =$
- b)  $(65 \div (-5)) \times 2 + (28 \div 7) =$
- c)  $2\frac{1}{4} \div (-\frac{8}{3}) + 1.5 =$
- d)  $\frac{(-15 + 6 \div (-2) - 22 \div 11)}{(2(15 \div (-3)) - 10)} =$



Ingresa a la página: [cmed.mx/m26](http://cmed.mx/m26), elige "Dividir", "Sencillo" y "Negativos" y resuelve los ejercicios. Puedes cambiar a "Triple" y elevar el nivel de dificultad.

## 6. Resuelve los siguientes problemas.

- a) Ana practica buceo y cierto día descendió desde el nivel del mar. Ella considera que el nivel del mar se encuentra a una altura cero y registra los descensos con números negativos. Cierta día descendió  $\frac{2}{5}$  m por segundo. Si su descenso duró 1.2 minutos, ¿a qué distancia del nivel del mar se encuentra?
- b) Manuel tiene una deuda en su tarjeta de crédito, representada con un número negativo, de  $-\$5\,400.00$ . El banco le ofrece dos planes para liquidarlo:

**plan A:** cubrir la deuda en 6 pagos mensuales fijos, agregando un interés mensual de 3% sobre el saldo inicial; es decir, se suman a la deuda  $-\$162.00$  por cada mes que dura el plazo.

**plan B:** pagar un interés total de 20% sobre la deuda y abonar (pagar) mensualmente  $\$720.00$ .

- ¿Cuál será pago total con el Plan A? ¿Cuánto abonará cada mes?
  - ¿Cuál será pago total con el Plan B? ¿En cuántos meses liquidará su deuda?
- c) Para fomentar la puntualidad del personal de una oficina se implementaron los incentivos que se muestran en el cartel que se muestra a continuación.

Puntualidad:  $+\$50.00$   
 Retraso menor a 30 minutos:  $-\$40.00$   
 Retraso mayor o igual a 30 minutos:  $-\$60.00$

- Calcula, utilizando números positivos y negativos, el beneficio o pérdida de cada empleado registrado en la tabla.

	Pedro	Lucía	Camila	Javier
Días que llegó puntual	15	12	19	8
Días con retraso menor a 30 minutos	3	2	1	4
Días con retraso mayor o igual a 30 minutos	2	6	0	8

- d) En cierto lugar la temperatura varió de manera constante durante cuatro horas consecutivas, de  $-1\text{ }^{\circ}\text{C}$  a  $-16\text{ }^{\circ}\text{C}$ , ¿cuál fue la variación por hora?
- e) Claudia presentó un examen de Matemáticas en el que le otorgaban 1.2 puntos por cada respuesta correcta y  $-0.8$  por cada respuesta incorrecta. Si Claudia obtuvo dieciocho puntos y contestó veintiuna preguntas de manera correcta, ¿en cuántas preguntas se equivocó?



Consulta las páginas de tu libro de texto de Matemáticas 2 en las que se plantea el tema “División de números enteros”; luego, reflexiona y contesta.

- ¿Es lo mismo dividir  $-120$  entre  $10$  que dividir  $120$  entre  $-10$ ? Explica tu respuesta.
- ¿Por qué número debes dividir un número para encontrar su simétrico?



Lee y contesta. Entrega el trabajo a tu profesor para que lo evalúe.

- Un buzo profesional tiene que descender al fondo del mar a  $-30.8$  m de profundidad. Si hizo el descenso en etapas de  $-7.7$  m, ¿en cuántas etapas llegó?
- Completa la tabla y contesta.

$\div$	$-\frac{1}{2}$	2.5	4
-0.1			
-1			
$\frac{2}{3}$			



Escribe los números y los signos de multiplicación y división que faltan.

$36 \xrightarrow{\quad} \boxed{\div(-9)} \xrightarrow{\quad} \boxed{\quad} \xrightarrow{\quad} \boxed{2} \xrightarrow{\quad} \boxed{\times 9} \xrightarrow{\quad} \boxed{\quad}$

$3.5 \xrightarrow{\quad} \boxed{\div(-5)} \xrightarrow{\quad} \boxed{\quad} \xrightarrow{\quad} \boxed{7} \xrightarrow{\quad} \boxed{\quad} \xrightarrow{\quad} \boxed{35}$

$\frac{3}{4} \xrightarrow{\quad} \boxed{\quad} \xrightarrow{\quad} \boxed{6} \xrightarrow{\quad} \boxed{\quad} \xrightarrow{\quad} \boxed{-12} \xrightarrow{\quad} \boxed{\quad} \xrightarrow{\quad} \boxed{-3}$



Inventa un problema y una adivinanza en la que se utilice la división de números enteros y resuélvelos. Compártelos con tus compañeros.

# Reglas de potencias

**Aprendizaje fundamental imprescindible.** Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas.

**Contenido específico.** Resuelve problemas de potencias con exponente entero.

## Materiales

- ✓ Libro de texto de Matemáticas 2.
- ✓ Hojas de cuadro chico.
- ✓ Lápices.
- ✓ Calculadora.
- ✓ Goma.

Observa la secuencia de figuras y responde en tu cuaderno.



Figura 1

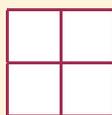


Figura 2

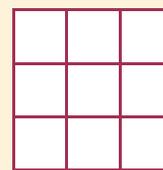


Figura 3

- ¿Cuántos cuadrados tiene la figura 3?
- Si la secuencia continúa, ¿cuántos cuadrados tendría la figura 4?
- ¿Cuántos cuadrados tendría la figura 8?
- ¿Cuántos cuadrados tendría la figura 16?
- ¿Cómo se calcula el número de cuadrados de la figura 25?
- Expresa con una multiplicación el número de cuadrados de la figura 40.
- Expresa cuántos cuadrados tiene la figura  $n$ .

## 1. Analiza la información y responde o haz lo que se pide.

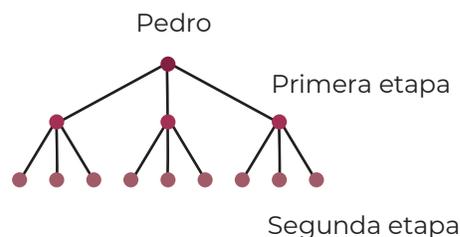


En el municipio donde vive Pedro se está implementando una campaña para mejorar el manejo y separación de la basura. El objetivo es que cada persona adulta explique las medidas a otras tres personas y pida que éstas hagan lo mismo. Analiza cómo se difunde la campaña a partir de una persona.

**Primera etapa.** Pedro explica la campaña a tres personas.

**Segunda etapa.** Cada una la explica a otras tres.

**Tercera etapa.** Cada una de estas nueve la explica a otras tres.



- a) ¿Cuántas personas reciben la información en la tercera etapa y cuántas en la quinta?
- b) El número de personas que reciben la información en la séptima etapa puede calcularse con una multiplicación con factores iguales, escribe cuál es.
- c) Si la campaña se hubiera planeado para que, en cada etapa, fueran cuatro personas las que reciben la información, en la sexta etapa el número de personas que reciben la información es  $4^6$ , ¿qué indica el exponente 6 en esta potencia de base 4?
- d) Si en cada etapa fueran cinco personas las que reciben la información, ¿cómo se expresa con un exponente el número de personas que la reciben en la cuarta etapa?

**2. Las potencias representan multiplicaciones con factores iguales, a partir de esto podemos hacer operaciones entre ellas. Lee la información y responde.**

- a) El largo de un rectángulo es  $3^2$  y su ancho es  $3^4$ . ¿Cuál es el área del rectángulo?
- b) El área del rectángulo puede expresarse con un exponente, indica cuál es.
- c) Valida tu respuesta al completar la tabla.

Producto de potencias con la misma base	Forma multiplicativa	Expresión simplificada
$4^4 \times 4^3$	$\underbrace{4 \times 4 \times 4 \times 4}_{\text{cuatro veces}} \times \underbrace{4 \times 4 \times 4}_{\text{tres veces}}$	$4^7$
$5^2 \times 5^3$	$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$	
$3^2 \times 3^4$		
$6^2 \times 6^2$		
$9^1 \times 9^4$		

- d) Explica cómo se relaciona el exponente de la tercera columna con los exponentes de la primera columna.
- e) Simplifica  $8^5 \times 8^3$  como una potencia con la misma base que los factores.
- f) Escribe una regla para expresar el producto de dos potencias con la misma base mediante una sola potencia con esa base.
- g) Indica cuál es el resultado de la multiplicación  $a^n \times a^m$ .
- h) Revisa el último renglón de la tabla. Escribe qué significa que una potencia tenga exponente igual a uno.

**3. En ocasiones las reglas matemáticas se definen para mantener regularidades en los resultados para distintos casos, así ocurre cuando el exponente es cero. Responde lo que se indica.**

- a) Si usas la regla que escribiste en la actividad 2 inciso f), es correcta la igualdad  $6^0 \times 6^4 = 6^4$ . Explica por qué.
- b) En la multiplicación del inciso anterior  $6^4$  está siendo multiplicado por otro número, y el resultado de la operación vuelve a ser  $6^4$ . ¿Cuánto debe valer  $6^0$  para que sea cierto?
- c) Escribe una regla para este caso.

**4. Utiliza lo que has aprendido para responder.**

- a) Explica cómo puedes verificar con calculadora este resultado:  $5^4 \times 5^7 = 5^{11}$ .
- b) ¿Cuál es el resultado de  $7^2 \times 7^5 \times 7^3$  si lo expresamos usando una potencia con base 7? Escribe tres ejemplos más con otras bases y verifica el resultado con la calculadora.

En una potencia  $a^b$  la base es  $a$  y el exponente es  $b$ .

- Cuando se multiplican dos o más potencias con la misma base, el resultado puede expresarse como una potencia con la misma base cuyo exponente es la suma de los exponentes de los factores, por ejemplo:  $5^4 \times 5^2 = 5^6$ .
- Cuando un número se eleva a la potencia 1, el resultado es el mismo número, por ejemplo:  $8^1 = 8$ .
- Cuando un número, distinto de cero, se eleva a la potencia 0, el resultado es uno, por ejemplo:  $7^0 = 1$ .

D. R. Castañeda, A y González, R. I. Matemáticas 2. SM de Ediciones

5. Observa los ejemplos para dividir dos potencias con la misma base y responde.

$$\frac{5^7}{5^3} = \frac{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}{5 \times 5 \times 5}$$

$$\frac{6^2}{6^5} = \frac{6 \times 6}{6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6}$$

Por la propiedad asociativa las multiplicaciones en una división pueden separarse:

$$\frac{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}{5 \times 5 \times 5} = \frac{5 \times 5 \times 5}{5 \times 5 \times 5} \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 1 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 1 \times 5^4 = 5^4$$

$$\frac{6 \times 6}{6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6} = \frac{6 \times 6}{6 \times 6} \times \frac{1}{6 \times 6 \times 6} = 1 \times \frac{1}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{6^3}$$

a) Explica cómo obtienes los resultados  $\frac{5^7}{5^3} = 5^4$  y  $\frac{6^2}{6^5} = \frac{1}{6^3}$  usando la calculadora.

6. Para uniformar los resultados en las operaciones, se define el valor cuando un exponente es negativo como

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}. \text{ Por ejemplo } \frac{1}{6^3} = 6^{-3}.$$

a) Completa la tabla para simplificar las divisiones de potencias con la misma base.

División de potencias	Forma multiplicativa	Expresión simplificada
$\frac{5^7}{5^3}$	$\frac{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}{5 \times 5 \times 5}$	$5^4$
$\frac{4^6}{4^3}$		
$\frac{2^8}{2^6}$		
$\frac{3^4}{3^7}$		
$\frac{7^1}{7^5}$		

b) Explica cómo se relacionan los exponentes en las expresiones de la primera columna, con el exponente de la expresión en la última columna.

c) Escribe una regla para expresar el resultado de la división de dos potencias.

d) Cuando en la división las dos potencias son iguales, por ejemplo en  $\frac{6^3}{6^3}$ , ¿qué ocurre con el resultado? Justifica tu respuesta.

- Cuando se dividen dos potencias con la misma base el resultado puede expresarse como una potencia con la misma base cuyo exponente es la resta de los exponentes del dividendo y el divisor.

- En una potencia, cuando el exponente es negativo, el resultado se define como

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

6. Una potencia también puede elevarse a un exponente. Completa la tabla y responde.

Potencia de potencia	Por la jerarquía de las operaciones se resuelven primero las operaciones dentro del paréntesis	Se desarrolla la siguiente potencia	Expresión simplificada
$(5^2)^4$	$(5 \times 5)^4$	$(5 \times 5)(5 \times 5)(5 \times 5)(5 \times 5)$	$5^8$
$(8^3)^2$			
$(4^4)^2$			
$(2^3)^3$			
$(7^2)^5$			
$(3^2)^2$			
$(1^6)^2$			

- a) Explica cómo se relaciona el exponente de las expresiones en la cuarta columna con los exponentes de las expresiones de la primera columna.
- b) Escribe una regla para expresar el resultado de una potencia de potencia.
- c) Explica cómo puedes usar la calculadora para obtener el resultado  $(5^2)^4 = 5^8$ .

La potencia  $(a^n)^m$  es una potencia de potencia, el resultado puede expresarse como una potencia de la misma base en la que los exponentes se multiplican:  $(a^n)^m = a^{nm}$



Consulta las páginas de tu libro de texto de Matemáticas 2 en las que se plantea el tema “Potencias con exponente entero” y contesta.

- ¿Cuál es el resultado de  $(\frac{8}{3})^3$ ?
- Expresa  $(-4)^2 \times (-4)^3$  como una potencia de base  $(-4)$ . ¿La base del producto es un número positivo o negativo?
- Expresa  $(-7)^4 \times (-7)^2$  como una potencia de base  $(-7)$ . ¿La base del producto es un número positivo o negativo?
- A partir de estos ejemplos, escribe otros similares y anota una regla para obtener el producto de una multiplicación de potencias cuyos factores tienen como base números negativos.



Lee y contesta. Entrega el trabajo a tu profesor para que lo evalúe.

- a) Calcula los resultados de cada potencia. Escribe varias reglas de los exponentes a partir de ellos.

$1^7$

$0^3$

$0^5$

$1^{12}$

$(-1)^4$

$(-1)^7$

- b) Revisa las reglas para exponentes que hemos visto en esta ficha, pon un título a cada regla y escríbela usando notación algebraica.
- c) La siguiente regla no se cumple, explica por qué.

$$a^n + b^n = (a + b)^n$$



Ingresa a: <https://el.portalacademico.cch.unam.mx/alumno/matematicas1/unidad1/OperacionesPotencias/LeyesExponentes>, elige las tres primeras leyes y revisa los recursos interactivos.

## Aproximación de raíces cuadradas

**Aprendizaje fundamental imprescindible.** Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas.

**Contenido específico.** Aproxima raíces cuadradas

### Materiales

- ✓ Libro de texto de Matemáticas 2.
- ✓ Hojas de cuadro chico.
- ✓ Lápices.
- ✓ Calculadora.
- ✓ Goma.

Observa los cuadrados, en cada uno se indica el área. Responde en tu cuaderno lo que se solicita.



$$A = 1 u^2$$



$$A = 4 u^2$$



$$A = 9 u^2$$



$$A = 16 u^2$$



$$A = 25 u^2$$

- ¿Cómo se calcula el área de cada cuadrado?
- Indica la medida del lado de cada cuadrado. Explica cómo lo calculaste.
- Si la medida del lado de un cuadrado es 5.25 cm, ¿cuál es su área?
- El área de un cuadrado es 100 m<sup>2</sup>, ¿cuánto mide su lado? Explica cómo lo calculaste.
- El área de un cuadrado es 400 cm<sup>2</sup>, ¿cuánto mide su lado? Explica cómo lo calculaste.

### 1. Analiza la información y responde o haz lo que se pide.

Susana está interesada en comprar un terreno cuadrado cuya área es de 2000 m<sup>2</sup>, lo primero que quiere hacer es poner una cerca alrededor. Para calcular el costo de comprar la malla ciclónica debe calcular la medida de cada lado.

- a) Susana sabe que el lado del terreno es mayor que 40 m y menor que 50 m. ¿Cómo llegó a esta conclusión?
- b) Susana calcula el área de otros terrenos para aproximar la del que quiere comprar. Completa la tabla para conocer el área de cada terreno.

Medida del lado	41 m	42 m	43 m	44 m	45 m	46 m	47 m	48 m	49 m
Área									

- c) ¿Entre qué dos medidas debe estar la medida del lado del terreno de Susana? Justifica tu respuesta.
- d) Si se quiere conocer una aproximación de la medida del lado del terreno, usando una cifra decimal, ¿cuál es la mejor aproximación? Explica cómo la calculaste.

2. El valor que has buscado se llama raíz cuadrada. La raíz cuadrada es la operación inversa de elevar al cuadrado. Encontrar la raíz cuadrada de un número implica hallar un número que multiplicado por sí mismo nos dé el número original. El valor de una raíz cuadrada generalmente no es exacto y debemos aproximarlos. Observa un procedimiento para calcular la raíz cuadrada de 1 000.

Para aproximar la raíz cuadrada de 1000

El valor está entre 30 y 40	$30^2 = 900$	$40^2 = 1600$
La raíz cuadrada de 1 000 está más cercana a 30, se toma, entonces, otro valor cercano a 30	$30^2 = 900$	$32^2 = 1024$
Es más cercano a 32, por lo que tomamos otro valor cercano a 32	$31.5^2 = 992.25$	$32^2 = 1024$
Es más cercano a 31.5	$31.5^2 = 992.25$	$31.6^2 = 998.56$
Es mayor que 31.6	$31.6^2 = 998.56$	$31.65^2 = 1001.7225$
Es más cercano a 31.65	$31.62^2 = 999.8244$	$31.65^2 = 1001.7225$
Es más cercano a 31.62	$31.62^2 = 999.8244$	$31.625^2 = 1000.140625$
Es más cercano a 31.625	$31.623^2 = 1000.014129$	$31.625^2 = 1000.140625$
Es menor que 31.623	$31.6225^2 = 999.98250625$	$31.623^2 = 1000.014129$
Es más cercano a 31.623	$31.6227^2 = 999.99515529$	$31.623^2 = 1000.014129$
Es más cercano a 31.6227	$31.6227^2 = 999.99515529$	$31.6228^2 = 1000.00147984$
Es más cercano a 31.6228	$31.62278^2 = 1000.0002149284$	$31.6228^2 = 1000.00147984$
Es menor que 31.62278	$31.622777^2 = 1000.000025191729$	$31.62278^2 = 1000.0002149284$

- Procedimientos como éste se llaman de *ensayo y error*, así se afina la aproximación dependiendo del número de decimales que se requieran. Usa el procedimiento para calcular una aproximación del lado del terreno de Susana de forma que tenga seis decimales.
- Explica cuál es mejor aproximación de la raíz cuadrada de 1000: 31.6227765 o 31.622777.
- En ocasiones la raíz cuadrada de un número sí es exacta; por ensayo y error determina la raíz cuadrada de 311.5225.



Consulta las páginas de tu libro de texto de Matemáticas 2 en las que se plantea el tema “Aproximación de raíces cuadradas” y contesta.

- La raíz cuadrada de un número siempre tiene dos valores: uno positivo y uno negativo, explica por qué.
- Haz un resumen de toda la información que puedas recopilar sobre la raíz cuadrada.



Lee y contesta. Entrega tu trabajo a tu profesor para que lo evalúe.

- Escribe cinco números decimales que tengan raíz cuadrada exacta. Explica cómo los determinaste.
- Determina, por ensayo y error, la raíz cuadrada de 40 000.

# Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y su solución gráfica

**Aprendizaje fundamental imprescindible.** Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

**Contenido específico.**

- Formula sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que representan diversas situaciones e identifica las incógnitas.
- Resuelve sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas mediante el método gráfico.

**Materiales**

- ✓ Libro de texto de Matemáticas 2.
- ✓ Hojas de cuadro chico.
- ✓ Lápices.
- ✓ Calculadora.
- ✓ Regla.
- ✓ Goma.

Es común encontrar en las redes sociales acertijos como el que se muestra en la imagen. Analiza y contesta.



Considera que  $2 \text{ perros} = 1 \text{ perro} + 1 \text{ perro}$

- ¿Qué representa la imagen de cada animal?
- ¿Qué animal tiene más masa? Explica tu respuesta.
- ¿Cuál es la masa máxima del perro? Explica tu respuesta.
- Completa la tabla asignando valores, por tanteo, a la masa del perro y a la del gato. Observa el ejemplo.

Perro (kg)	Gato (kg)	Primera igualdad	Segunda igualdad
9	7	$7 + 9 + 9 + 7 = 7 + 2(9) + 7 = 32$	$9 - (7 + 7) = 9 - (2 \times 7) = -5 \quad -5 \neq 4$
	5		

- ¿Cuál es la masa de cada animal?
- Escribe el procedimiento que seguiste para llegar al resultado.

D. R. García, R. Molina M. Ay Alberro, A. M. P. Matemáticas 2. Correo del Maestro



### 1. Considera la situación anterior y contesta.

- Si se denota con  $p$  la masa del perro y con  $g$  la del gato, escribe la ecuación que represente cada una de las igualdades del acertijo.
- ¿Cuántas ecuaciones lineales son y cuántas incógnitas tiene cada una?
- ¿Qué valor de  $p$  y qué valor de  $g$  son solución común de las ecuaciones que escribiste?

### 2. Analiza la siguiente situación y contesta.

En un taller hay quince vehículos entre automóviles con cuatro ruedas y motocicletas con dos. Si el número de ruedas de todos los vehículos es 48, ¿cuántos automóviles y cuántas motocicletas hay?

- ¿Cuáles son las cantidades conocidas y desconocidas?
- Asigna una letra distinta a cada una de las cantidades desconocidas.
- Usa las letras que asignaste en el inciso b) y representa la suma de la cantidad de automóviles y de la cantidad de motocicletas. ¿A qué debe ser igual esa suma?
- Utiliza las mismas letras para representar la cantidad de ruedas de todos los automóviles, la cantidad de ruedas de todas las motocicletas y la suma total de ruedas de todos los vehículos. ¿A qué es igual esta suma?
- Plantea las ecuaciones que modelan los incisos c) y d).

Un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** es un conjunto de dos ecuaciones de primer grado, cada una con dos incógnitas con una relación tal que las incógnitas de ambas ecuaciones representan a los mismos valores.

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -3x + y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + a = -1 \end{cases}$$

Es un sistema de  $2 \times 2$  ecuaciones lineales.

No es un sistema de  $2 \times 2$  ecuaciones lineales, porque las incógnitas son distintas.

### 3. Selecciona el sistema de dos ecuaciones lineales que representa cada situación y escribe qué representa cada incógnita. Puedes ayudarte haciendo un procedimiento similar al de los incisos a)-e) de la pregunta 2.

- José Luis ahorró \$1 800.00 con quince billetes de \$100.00 y de \$200.00. ¿Cuántos billetes de cada tipo ahorró?

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ 100x + 200y = 1800 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 100x + y = 15 \\ x + 200y = 1800 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1800 \\ 100x + 200y = 15 \end{cases}$$

- En un corral hay gallinas y conejos. Juan contó 40 cabezas y 106 patas. ¿Cuántos animales de cada tipo hay?

$$\begin{cases} a + b = 15 \\ 4a + 2b = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 2b = 106 \\ 4a + b = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 40 \\ 4a + 2b = 106 \end{cases}$$

Para formular el sistema de ecuaciones lineales que modela una situación puedes:

- a) Identificar las cantidades desconocidas y las cantidades conocidas en el enunciado del problema;
- b) representar con una letra distinta cada cantidad desconocida, identificadas en el paso anterior;
- c) usar las letras del paso anterior para obtener expresiones algebraicas que relacionen las cantidades desconocidas con otras cantidades;
- d) establecer ecuaciones que representen la situación, igualando, en cada una, dos expresiones de una misma cantidad.

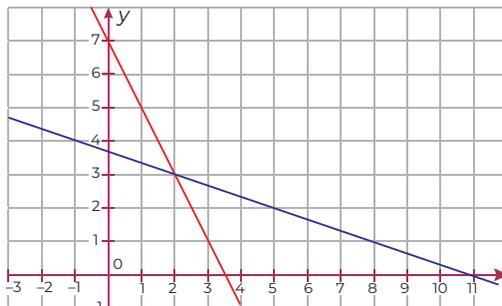
Relaciona estos pasos con los incisos de la actividad 2 y úsalos para verificar tus respuestas de la actividad 3.

Adaptado de Arnau, D. (2015). Hacia profesores artificiales en la resolución algebraica de problemas verbales. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX*, (pp. 45-59), Alicante: SEIEM.

**4. Analiza el siguiente acertijo y contesta.**

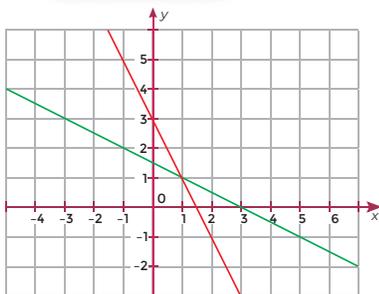
Encuentra dos números tales que el doble del primero, más el segundo, dé siete y, además, si al primero le sumas el triple del segundo obtengas once.

- a) Denota por  $x$  al primer número y por  $y$  al segundo para escribir un sistema de dos ecuaciones lineales que represente la situación.
- b) Determina a qué recta corresponde cada una de las ecuaciones que escribiste en la siguiente gráfica. Explica tu respuesta .
- c) Si decimos que el punto donde se intersectan dos rectas es la solución del sistema de las dos ecuaciones lineales que representan, ¿cuáles son los números que se buscan en el acertijo?

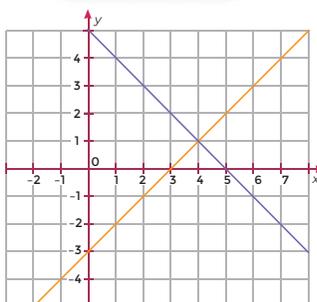


**5. Asocia las gráficas con los sistemas de ecuaciones lineales correspondientes y determina la solución de los tres sistemas.**

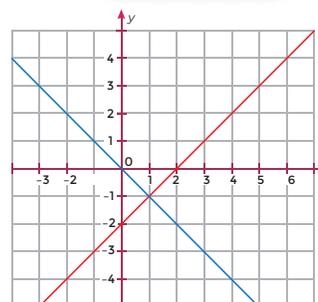
$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$



La **solución** de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es un par de valores que al sustituirse en las incógnitas hace que las igualdades sean ciertas. Cuando las rectas que corresponden al sistema se cortan en un punto, dicho punto es la solución del sistema, es decir, los valores de las coordenadas de  $x$  y de  $y$  satisfacen ambas ecuaciones.



Consulta las páginas de tu libro de texto de Matemáticas 2 en las que se trate el tema “Método gráfico para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas” y contesta.

- ¿Qué condición gráfica debe cumplir un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas para tener una única solución, una infinidad de soluciones o no tener solución? Da un ejemplo para cada caso.
- Describe paso a paso el método gráfico para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.



**Analiza la situación y contesta las preguntas. Entrega el trabajo a tu profesor para que lo evalúe.**

Brenda y Raúl son choferes de tráiler en la misma compañía de transportes. Un día viajaron por la misma carretera en sentidos opuestos e iniciaron su viaje al mismo tiempo. Como parte de la rutina, conversaron por radio al comenzar su trayecto:

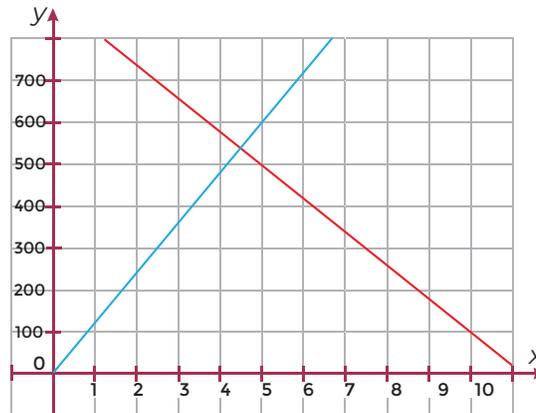
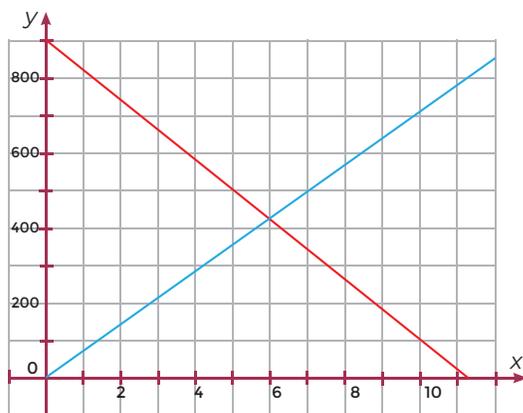
Brenda: Estoy saliendo del kilómetro 900 a una rapidez constante de 80 km por hora.

Raúl: Voy saliendo del kilómetro cero a 70 km por hora. Cambio.

Brenda: Nos encontramos en el camino, cambio y fuera.

¿Después de cuánto tiempo se encontraron en la carretera y en qué kilómetro fue?

- Construye dos tablas de valores para saber en qué kilómetro se encuentra cada quién a lo largo de las primeras ocho horas de viaje y, a partir de ellas, escribe un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que represente la situación.
- Determina qué gráfica corresponde al sistema que representa la situación y encuentra en qué kilómetro y después de cuánto tiempo se encontraron en la carretera.



Considera el siguiente sistema de ecuaciones, traza la gráfica en tu cuaderno y encuentra la solución.

$$\begin{cases} y = -1 - 2x \\ y = x + 5 \end{cases}$$

Si tienes internet, también ingresa a *Geogebra*, activa la vista gráfica y algebraica, sigue las instrucciones y verifica tus resultados:

- En la barra de “Entrada” escribe cada una de las ecuaciones y después teclea “Intro”. En la vista algebraica aparecen las expresiones algebraicas que escribiste y en la vista gráfica las rectas que las representan.
- Selecciona con el ratón “Punto” y coloca un punto donde las dos rectas se intersectan. En la vista algebraica verás las coordenadas del punto de intersección.
- ¿Cuál es la solución del sistema de ecuaciones?

# Métodos para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

**Aprendizaje fundamental imprescindible.** Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

**Contenido específico.** Resuelve sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante los métodos de sustitución e igualación.

## Materiales

- ✓ Libro de texto de Matemáticas 2.
- ✓ Hojas de cuadro chico.
- ✓ Lápices.
- ✓ Calculadora.
- ✓ Regla.
- ✓ Goma.

### Lee la situación, analízala y contesta.

Un hotel tiene habitaciones dobles (dos camas) y sencillas (una cama), sumando en total 47 habitaciones y 79 camas. ¿Cuántas habitaciones dobles y sencillas hay en el hotel?

- La situación anterior se puede representar con el siguiente sistema:

$$x + y = 47$$

$$x + 2y = 79$$

Construye una tabla de valores y grafica cada recta para resolver el sistema por el método gráfico. ¿Cuántas habitaciones de cada tipo hay?

- Paola y Marco resolvieron la situación anterior utilizando otros métodos.

Paola

$$x + y = 47$$

$$x + 2y = 79$$

Despejo  $x$  de la primera ecuación:

$$x = 47 - y$$

Sustituyo en la segunda ecuación:

$$(47 - y) + 2y = 79$$

Resuelvo:

$$47 + y = 79$$

$$y = 79 - 47$$

$$y = 32$$

Sustituyo en el despeje:

$$x = 47 - 32$$

$$x = 15$$

Marco

$$x + y = 47$$

$$x + 2y = 79$$

Despejo  $y$  de ambas ecuaciones:

$$y = 47 - x$$

$$y = \frac{79 - x}{2}$$

Igualo ambos despejes:

$$47 - x = \frac{79 - x}{2}$$

Resuelvo:

$$94 - 2x = 79 - x$$

$$94 - 79 = -x + 2x$$

$$15 = x$$

Sustituyo en uno de los despejes:

$$y = 47 - 15$$

$$y = 32$$

- ¿Qué valores representan las incógnitas  $x$  y  $y$ ? ¿Qué significa despejar?
- ¿Qué diferencias y similitudes encuentras entre ambos procedimientos?
- En ambos procedimientos, ¿cuántas incógnitas tiene la ecuación que aparece después de "Sustituyo en la segunda ecuación" y en "Igualo ambos despejes"?
- ¿Llegaron al mismo resultado? ¿Cuántas habitaciones de cada tipo hay?
- ¿Por qué Marco puede establecer la igualdad  $47 - x = \frac{79 - x}{2}$ ?





**1. Considera el procedimiento que utilizó Paola y contesta.**

Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, es importante reconocer qué incógnitas despejar y qué método es el que más conviene utilizar.

- a) Observa que Paola utiliza las dos ecuaciones del sistema para obtener una ecuación con una sola incógnita. Describe con palabras cómo lo hace.
- b) Para obtener una ecuación con una incógnita, Paola sustituye el valor de  $x$  de la segunda ecuación del sistema por  $47 - y$ . Explica por qué puede hacerlo.
- c) ¿Qué significa dentro del contexto de la situación que  $y = 32$ ?
- d) Explica cómo obtuvo  $x = 15$  y qué significa dentro del contexto de la situación.

**2. Resuelve los sistemas de ecuaciones con el procedimiento que utilizó Paola, el cual se conoce como el Método de sustitución. Comprueba tu solución.**

a)  $4a + b = 6$        $-2a + 2b = 2$                       b)  $2x + 3y = 4$        $x - 4y = 13$

**3. Considera el procedimiento que utilizó Marco y contesta.**

- a) Observa que Marco utiliza las dos ecuaciones del sistema para obtener una ecuación con una sola incógnita. Describe con palabras cómo lo hace.
- b) Para obtener una ecuación con una incógnita, Marco iguala los valores de  $y$  que obtuvo. Explica por qué puede hacerlo.
- c) Describe con palabras por qué Marco encuentra primero el valor de  $x$  y luego el de  $y$ , y Paola lo hace al revés, primero el valor de  $y$  y luego el de  $x$ .

**4. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones con el procedimiento que utilizó Marco, que se conoce como el Método de igualación. Comprueba tu solución.**

a)  $2x + y = 1$                        $4x + 3y = 5$                       b)  $a - 3b = -7$                        $a + 5b = 9$

**5. Analiza los siguientes sistemas y señala en los recuadros qué método, el de igualación o el de sustitución, elegirías para resolverlo.**

Sistema	$x = -6y + 7$ $2x - 9y = 14$	$x = 5 - 5y$ $x = \frac{10 + y}{35}$	$x + y = 1$ $x - y = 5$	$2a - b = 1$ $a + 2b = 8$
Método				

**Método de sustitución**

1. Despejar una incógnita de alguna de las ecuaciones.
2. Sustituir el valor de la incógnita en la otra ecuación.
3. Resolver la ecuación lineal que se obtiene en el paso anterior.
4. Sustituir en una ecuación el valor encontrado para una incógnita, para encontrar el valor de la segunda incógnita.

**Método de igualación**

1. Despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones.
2. Igualar los segundos miembros de los despejes anteriores.
3. Resolver la ecuación lineal que se obtiene en el paso anterior.
4. Sustituir en una ecuación el valor encontrado para una incógnita, para encontrar el valor de la segunda incógnita.

6. Investiga si el par de valores dados son solución del sistema de ecuaciones.

Sistema	Par de valores	¿Es solución?	Justificación
$7x + 4y = 13$ $5x - 2y = 19$	$x = 3$ $y = -2$		
$5x + 6y = 20$ $4x - 3y = -23$	$x = -2$ $y = 5$		
$m + 6n = 27$ $7m - 3n = -5$	$m = 3$ $n = 4$		

7. Plantea para cada situación un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y resuélvelo en tu cuaderno con el método que consideres conveniente.

- a) Pedro guardó en su alcancía únicamente monedas de \$5.00 y \$10.00. Si en total tiene 73 monedas que equivalen a \$470.00, ¿cuántas monedas tiene de cada denominación?

Sistema:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Monedas de \$5.00:} \\ \text{Monedas de \$10.00:} \end{array} \right.$

- b) A Rosa le gusta jugar con su primo Eduardo utilizando números. Rosa le planteó encontrar dos números que sumados den quince y que el doble de uno de ellos sea igual al otro más tres unidades. ¿De qué números se trata?

Sistema:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Primer número:} \\ \text{Segundo número:} \end{array} \right.$

- c) Rocío y su hermano Rafael son aficionados al modelismo y tienen una colección de barcos y aviones. Rocío comentó: "Si tuviéramos once barcos más, tendríamos el mismo número de barcos y aviones", a lo que Rafael respondió: "Pero si tuviéramos doce aviones más, tendríamos el doble de aviones que de barcos". ¿Cuántos barcos y aviones tienen Rocío y Rafael?

Sistema:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Número de aviones:} \\ \text{Número de barcos:} \end{array} \right.$

- d) Un grupo de jóvenes irá a un concierto en una camioneta en la que sólo pueden viajar diez personas, además del chofer. Los boletos preferenciales cuestan \$300.00 y los generales \$150.00. En total juntaron \$2 100.00 pesos y acordaron rifar los boletos preferenciales. ¿Cuántos boletos de este tipo rifarán?

Sistema:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Boleto preferencial:} \end{array} \right.$



Consulta las páginas de tu libro de texto de Matemáticas 2 en las que se trate el tema “Métodos para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas” y contesta.

Escribe un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas para cada una de las siguientes condiciones:

- tener una única solución,
- no tener solución,
- tener infinidad de soluciones.

Indica en cuál de los tres sistemas de ecuaciones anteriores éstas son equivalentes y explica por qué.



Analiza cada sistema y escribe debajo el método que utilizarás para resolverlo. Justifica tu elección y resuélvelo. Entrega el trabajo a tu profesor para que lo evalúe.

$$\begin{aligned} 2w - z &= 3 \\ z &= 7 - 3w \end{aligned}$$

Método:

w = \_\_\_\_\_

z = \_\_\_\_\_

$$\begin{aligned} 9 - a &= 3b \\ a - 2b &= -1 \end{aligned}$$

Método:

a = \_\_\_\_\_

b = \_\_\_\_\_



En el siguiente esquema une los números, que son solución de cada sistema, con un segmento de recta y descubre las figuras geométricas que se forman. Observa en la imagen el trazo que corresponde a la solución (3, 10).

$$\begin{aligned} x + y &= 13 \\ y &= 2x + 4 \\ \text{Solución: } &(3, 10) \end{aligned}$$

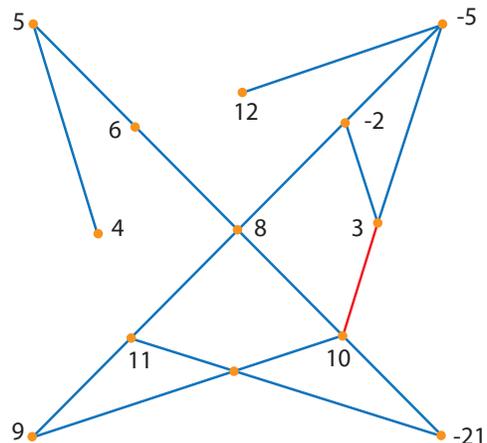
$$\begin{aligned} y &= x - 7 \\ x + 2y &= 19 \\ \text{Solución: } &( , ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= -15 \\ 3x - 4y &= -18 \\ \text{Solución: } &( , ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= y - 7 \\ 3x - 5y &= -31 \\ \text{Solución: } &( , ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - y &= -24 \\ x + 8y &= 3 \\ \text{Solución: } &( , ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 2x \\ 3y + x &= 42 \\ \text{Solución: } &( , ) \end{aligned}$$



Resuelve paso a paso un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Intercámbialo con tus compañeros y pide que te digan cuál de los métodos utilizaste y que justifiquen su respuesta. Haz lo mismo tú con su procedimiento.

## Entre líneas y curvas

**Aprendizaje fundamental imprescindible.** Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de su representación tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.

**Contenido específico.** Analiza y compara situaciones de proporcionalidad inversa a partir de su representación tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.

### Materiales

- ✓ Libro de texto de Matemáticas 2.
- ✓ Cuaderno y lápiz.
- ✓ Regla o escuadra.
- ✓ Calculadora.
- ✓ Equipo de cómputo, celular o tableta con acceso a internet.

### Lee los problemas y responde.

a) Al variar la longitud de los lados de un cuadrado, su perímetro cambia.

- Completa la tabla.



Lado (cm)	2	4	6	8	10
Perímetro (cm)					

- ¿Cómo se puede saber si dos magnitudes varían proporcionalmente?
- ¿El perímetro y el lado son magnitudes directamente proporcionales?

b) Para hacer una excursión escolar, se contrata el servicio de un autobús por el que se deben pagar \$1600.00.

- Se han anotado 28 alumnos para ir a la excursión. ¿Cuánto pagará cada alumno por el transporte?
- Si asisten más alumnos, ¿el monto que cada uno debe pagar por transporte aumenta o disminuye?
- ¿Cuánto pagaría cada uno si fueran 32 alumnos?, ¿y si fueran 40?
- ¿La cantidad de alumnos y la cantidad por pagar del transporte son magnitudes directamente proporcionales?
- Explica en qué te basaste para responder la pregunta anterior.

### 1. Lee la información y haz lo que se pide.

Ricardo quiere saber cuántos galones de pintura debe comprar para pintar veintiocho muros de  $102 \text{ m}^2$  y a cuántos pintores debe contratar, considerando que todos trabajan al mismo ritmo. Sabe que con cuatro galones se pueden pintar  $34 \text{ m}^2$  de pared, aplicando dos manos de pintura, y que un solo pintor tardaría 30 días en hacer el trabajo.



- a) Escribe los datos faltantes en la tabla.

Galones de pintura	1	2	4	5	7	10	15
Metros cuadrados			34				

- b) ¿El número de galones y la cantidad de metros cuadrados son magnitudes directamente proporcionales?, ¿por qué?



En el siguiente sitio <http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/telesecundaria/tsa01g01v02/u03t05s01.html> encontrarás más información sobre gráficas, tablas y expresiones asociadas con problemas de proporcionalidad directa.

- c) En caso de que sean proporcionales, ¿cuál es la constante de proporcionalidad?
- d) ¿Cuántos galones de pintura se necesitan para pintar 102 m<sup>2</sup> de pared? Escribe el procedimiento que seguiste para encontrar la respuesta.
- e) Completa la tabla suponiendo que todos los pintores trabajan al mismo ritmo.

Número de pintores	1	2	3	4	5	6	7
Días	30		10				

- f) Escribe las diferencias que encuentras entre la forma de variación que se muestra en esta tabla y la tabla anterior.
- g) ¿Qué operación hiciste para determinar cuántos días tardan dos trabajadores?
- h) Multiplica las dos cantidades de cada columna, es decir, el número de pintores por el correspondiente número de días. Escribe los resultados que obtuviste.
- i) ¿Cuántos pintores, que trabajan al mismo ritmo, se requieren para hacer el trabajo en tres días?, ¿y en dos días?
- j) Revisa la siguiente información y verifica tus respuestas.

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** si varían de la misma forma, por ejemplo, si una de ellas se duplica, sucede lo mismo con la otra; o si una de ellas se divide entre 3, lo mismo ocurre con la otra. Esto se puede verificar calculando la división entre los valores que van tomando las magnitudes. Si el cociente obtenido es siempre el mismo número, las magnitudes son directamente proporcionales. Al valor que toma el cociente se le llama **constante de proporcionalidad**. Si se sabe que las magnitudes  $x$  y  $y$  son directamente proporcionales y la constante de proporcionalidad es  $k$ , entonces  $y = kx$ , es decir, el valor de  $y$  puede obtenerse multiplicando  $x$  por la constante de proporcionalidad. El problema del inciso a) de la actividad 1 es un ejemplo de este tipo de variación.

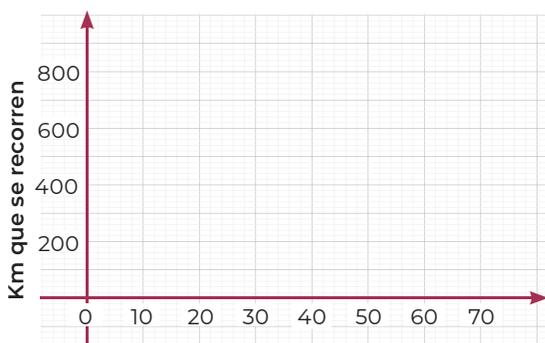
Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** si al multiplicar una de ellas por un número, la otra se divide entre el mismo número, y viceversa, si al dividir una de ellas entre un número, la otra queda multiplicada por el mismo número. Si dos magnitudes son inversamente proporcionales, y a un valor  $x$  de la primera magnitud le corresponde un valor  $y$  de la segunda magnitud, entonces el producto  $xy$  es una constante que se conoce como **constante de proporcionalidad inversa**.

Esto se puede escribir así  $xy = k$ , o bien  $y = \frac{k}{x}$ . El problema del inciso e) de la actividad 1 es un ejemplo de este tipo de variación.

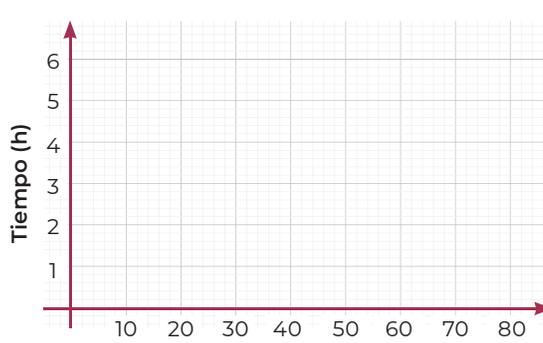
## 2. Analiza el texto y haz lo que se indica.

Diego va de viaje a visitar a sus tíos. Sabe que 15 L de combustible le alcanzan para recorrer 180 km, con 30 L recorre 360 km y con 50 L puede recorrer 600 km. También sabe que a una rapidez constante de 80 km/h hace el recorrido de su casa a la casa de sus tíos en seis horas; manteniendo la rapidez en 120 km/h, lo hace en cuatro horas; y con rapidez constante de 160 km/h, llega en tres horas.

- Denota con  $L$  la cantidad de litros y con  $r$  el número de kilómetros que se pueden recorrer. ¿Qué tipo de relación proporcional hay entre estas dos magnitudes? ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? Escribe la expresión algebraica que representa la relación entre estas dos magnitudes.
- Ahora denota con  $x$  la rapidez con que viaja Diego de su casa a la casa de sus tíos y con  $y$  el número de horas en que efectúa el recorrido. ¿Qué tipo de relación proporcional hay entre estas dos magnitudes? ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? Escribe la expresión algebraica que representa la relación entre estas dos magnitudes.
- Escribe sobre cada plano cartesiano la expresión algebraica de la relación que representa. Ubica los respectivos puntos en cada plano y anota sus coordenadas  $(L, r)$  o  $(x, y)$ . También agrega un título a las gráficas.



Litros de gasolina



Rapidez (km/h)

- Si Diego viajara a 100 km/h, ¿cuántas horas tardaría en hacer el recorrido?
- En la gráfica que corresponda, traza el punto con abscisa y ordenada iguales a los valores del inciso anterior.
- ¿Qué distancia hay de la casa de Diego a la de sus tíos? ¿Cuántos litros de gasolina necesita para recorrer esa distancia?
- Traza el punto con abscisa y ordenada iguales a los valores del inciso anterior.
- Si Diego quiere hacer el recorrido de su casa a la de sus tíos en cinco horas, ¿con qué rapidez debe viajar? Traza el punto correspondiente en el plano adecuado.
- Traza la gráfica que corresponde a la relación directamente proporcional.
- ¿Puedes unir con una sola recta los puntos del plano para obtener la gráfica de la relación de proporcionalidad inversa?, ¿por qué?

### 3. Ahora, lee el texto y haz lo que se pide.

En el sistema de engranes de una máquina el movimiento de una rueda provoca el movimiento de las demás. La expresión que representa la relación del número  $y$  de vueltas que da una rueda con el número  $x$  de engranes que tiene la rueda es  $y = \frac{108}{x}$ .

a) Completa la tabla.

Número de engranes ( $x$ )	4	8	10		20	30
Número de vueltas ( $y$ )				6		
$(x, y)$	$A = (4, \_)$	$B = (8, \_)$	$C = (10, \_)$	$D = (\_, 6)$	$E = (20, \_)$	$F = (30, \_)$

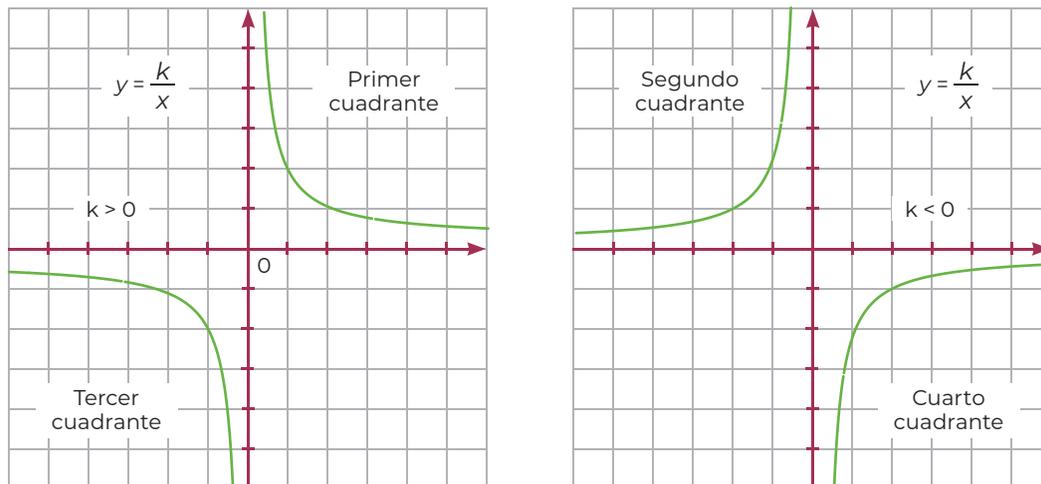
- b) En un plano cartesiano, ubica los puntos  $(x, y)$  de la tabla anterior.
- c) Calcula la pendiente de las rectas que pasan por los puntos:  $A$  y  $B$ ;  $A$  y  $C$ ;  $A$  y  $D$ ;  $A$  y  $E$ .
- d) ¿Hay pendientes iguales? ¿Cómo son las pendientes?
- e) Reflexiona si puede haber tres puntos  $G$ ,  $H$  y  $J$  en la gráfica donde la pendiente del segmento de recta que une  $G$  con  $H$  sea igual a la pendiente del segmento que une  $G$  con  $J$ . Prueba calculando la pendiente para segmentos que unan distintos puntos sobre la gráfica.
- f) Si calculas la pendiente de una recta con dos de sus puntos y después la calculas con otros dos puntos de ésta, ¿puedes obtener valores distintos?
- g) ¿La gráfica de la relación entre  $x$  y  $y$  puede ser una recta?, ¿por qué? ¿La gráfica puede contener algún segmento de recta? ¿por qué?
- h) En el mismo plano, traza la gráfica que corresponde a la relación entre el número  $x$  de engranes que tiene una rueda y el número  $y$  de vueltas que da.
- i) ¿La relación entre las magnitudes  $x$  y  $y$  es de proporcionalidad inversa?, ¿por qué?
- j) Conforme  $x$  va tomando valores cada vez más grandes, ¿los valores correspondientes de  $y$  crecen o decrecen?

Una relación de **proporcionalidad inversa** se representa gráficamente en un plano cartesiano mediante **una curva**. Los puntos  $(x, y)$  de la gráfica satisfacen la relación  $y = \frac{k}{x}$ , donde  $k$  es la constante de proporcionalidad. La relación representada por esa gráfica se llama **función de proporcionalidad inversa**. A  $x$  se le llama **variable independiente** y a  $y$  **variable dependiente**.

En una gráfica de proporcionalidad inversa, donde  $y = \frac{k}{x}$ :

- El producto de las coordenadas de cada punto es la constante de proporcionalidad  $k$ .
- La curva tiene dos ramas. Cuando  $k > 0$ , una rama está en el primer cuadrante y la otra en el tercero; y si  $k < 0$ , una rama está en el segundo cuadrante y la otra en el cuarto.
- Si  $k > 0$ , la gráfica es **decreciente**: conforme crecen los valores de  $x$ , los de  $y$  decrecen. Y para  $k < 0$ , la gráfica es **creciente**: conforme crecen los valores de  $x$ , los de  $y$  también crecen.

La gráfica se acerca a los ejes coordenados, pero no los atraviesa.



Consulta las páginas de tu libro de texto de Matemáticas 2 en las que se trabajen la proporcionalidad directa e inversa y sus características con base en su representación tabular, gráfica y algebraica. Luego, reflexiona y contesta.

- ¿Cuál es la diferencia entre una relación de proporcionalidad directa y una relación de proporcionalidad inversa??
- ¿Cómo es la gráfica de una variación de proporcionalidad directa?, ¿y la de una variación de proporcionalidad inversa?

**Resuelve y entrega tus respuestas al profesor para que evalúe tu aprendizaje.**

En un deportivo, cuatro llaves tardan doce horas en llenar una alberca. Si todas las llaves arrojan la misma cantidad de agua, ¿cuánto tiempo tardan en llenar la alberca siete llaves?

- ¿Qué tipo de relación hay entre el número de llaves y el tiempo que tardan en llenar el depósito?
- Escribe la expresión que describe esta relación.
- Traza la gráfica que corresponde y ubica en ésta el punto cuyas coordenadas solucionan el problema. Agrega un título a la gráfica.

**Haz la actividad con dos compañeros.**

Entren en el sitio [www.geogebra.org/m/T2A2yyNb](http://www.geogebra.org/m/T2A2yyNb) y explórenlo. Muevan el cursor para dar distintos valores a la constante de proporcionalidad  $k$  y observen qué sucede con la gráfica. Anoten una conclusión general sobre la forma de la gráfica para valores positivos y negativos de  $k$ . Luego jueguen a estimar y esbozar cómo sería la gráfica de una expresión algebraica de variación proporcional inversa. Gana quien estime o esboce mejor la gráfica correspondiente.

**Explica a tus familiares qué fenómenos de la vida cotidiana corresponden a situaciones de variación proporcional directa e inversa. Por ejemplo, cuánta pintura se necesita para pintar un metro cuadrado de pared, y cuánta para dos metros; y cuánto tiempo se tardaría en hacerlo un pintor, dos pintores o tres pintores.**



## Aplica la proporcionalidad inversa

**Aprendizaje fundamental imprescindible.** Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de su representación tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.

**Contenido específico.**

- Analiza y compara situaciones de proporcionalidad inversa a partir de su representación tabular, gráfica y algebraica.
- Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.

**Materiales**

- ✓ Libro de texto de Matemáticas 2.
- ✓ Cuaderno y lápiz.
- ✓ Regla o escuadra.
- ✓ Calculadora.
- ✓ Equipo de cómputo, celular o tableta con acceso a internet.

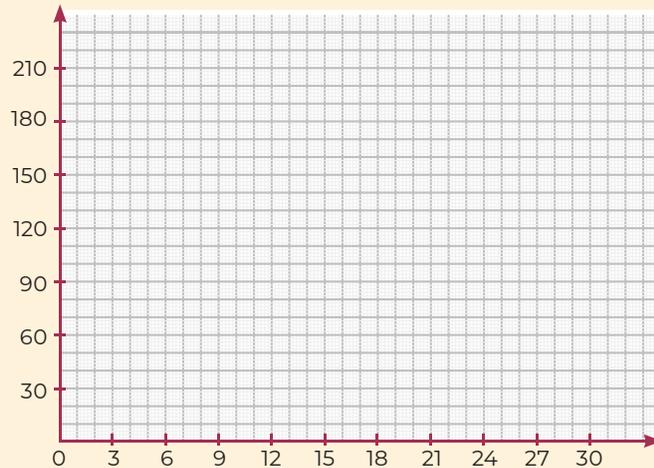


**Analiza la situación, responde en tu cuaderno y haz lo que se pide.**

Un camión de carga recorrió cierta distancia a una rapidez constante de 75 kilómetros por hora (km/h) en 12 h. Otros vehículos, viajando a rapidez constante, recorren la misma distancia en distintos tiempos, que se registran en la tabla.

- ¿Qué distancia recorrió el camión?
- En la tabla, escribe la rapidez correspondiente a cada tiempo.
- En el plano, traza la gráfica y escriban el nombre de los ejes y un título.

$t(h)$	$R(km/h)$
7.5	
9	
12	75
15	
18	
30	



- ¿La gráfica es creciente o decreciente? ¿Es una curva o una recta?
- Conforme aumenta el tiempo en que los vehículos recorren la misma distancia, ¿qué sucede con la rapidez: aumenta o disminuye?
- Y si el tiempo que tardan los vehículos en recorrer la misma distancia va disminuyendo, ¿la rapidez aumenta o disminuye?
- Un cohete recorre la misma distancia con una rapidez mayor a 1 000 km/h. Sin hacer cálculos, estima si tardará más o menos de una hora en hacerlo.
- ¿En qué intervalo de tiempo es mayor la variación de la rapidez: de 6 h a 10 h o de 15 h a 30 h? Responde con ayuda de la gráfica.



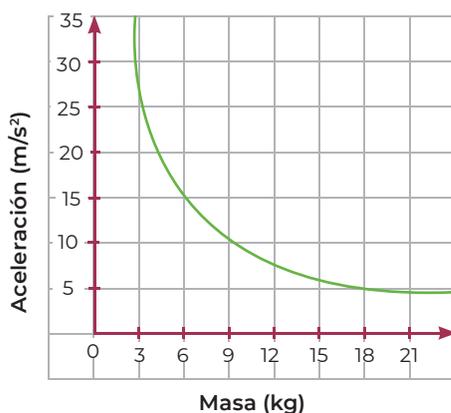
### 1. Analiza el texto, responde en tu cuaderno y haz lo que se indica.

Cuando se aplica una fuerza a un objeto con una cierta masa, el objeto se acelera. La segunda ley de Newton establece que  $F = ma$ , donde  $F$  es la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo,  $a$  es la aceleración y  $m$  es la masa.

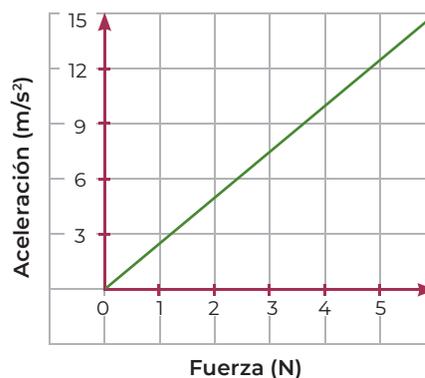
La masa se mide en kg, la aceleración en  $m/s^2$  y la fuerza en newtons. Los newtons se denotan con N, y un newton equivale a la fuerza aplicada a un objeto de 1 kg con una aceleración de  $1 m/s^2$ , es decir,  $1 N = 1 kg(m/s^2)$ . Así, al dividir fuerza entre masa se obtienen las unidades de la aceleración.

En un laboratorio se hicieron dos experimentos, el A y el B, aplicando fuerzas a objetos y midiendo la aceleración resultante. Los datos se registraron y con base en éstos se trazaron las siguientes gráficas.

**A. Relación aceleración-masa**



**B. Relación aceleración-fuerza**



- a) ¿En cuál de los experimentos ocurrió que al aumentar una de las magnitudes la otra disminuyó, en el A o en el B?
- ¿En este experimento varió la masa de los objetos? Si tu respuesta es afirmativa, ¿qué sucedió con la aceleración conforme aumentó la masa?, ¿varió la fuerza?
  - Usa los datos de la gráfica para calcular la fuerza que se aplicó a los objetos.
  - Completa la expresión que permite calcular la aceleración conociendo la masa de los objetos:  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- b) ¿En cuál de los experimentos ocurrió que al aumentar una de las magnitudes la otra también aumentó, en el A o en el B?
- ¿En este experimento varió la fuerza aplicada a los objetos? Si tu respuesta es afirmativa, ¿qué ocurrió con la aceleración al aumentar la fuerza?, ¿varió la masa?
  - Calcula la masa.
  - Completa la expresión para calcular la aceleración conociendo la fuerza:  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- c) ¿En cuál de los dos experimentos la relación entre las magnitudes es inversamente proporcional?, ¿en cuál la relación es directamente proporcional?
- d) Completa la siguiente formulación de la segunda ley de Newton.
- Cuando se aplica una fuerza constante a distintos cuerpos, la aceleración es  $\underline{\hspace{2cm}}$  proporcional a la masa de los cuerpos; y cuando varía la fuerza que se aplica a un mismo cuerpo, la aceleración es  $\underline{\hspace{2cm}}$  proporcional a la fuerza que actúa sobre él.

La relación entre magnitudes inversamente proporcionales se utiliza para modelar fenómenos de la física y otras ciencias, así como en distintos contextos sociales, económicos y empresariales.

Para identificar si un problema planteado en cualquier contexto corresponde o no a una relación de proporcionalidad inversa, puedes hacer lo siguiente:

1. Analiza el enunciado hasta que lo tengas totalmente claro,
2. Identifica las magnitudes involucradas,
3. Registra los datos proporcionados,
4. Verifica si se cumple que el producto de las magnitudes es constante (si te dan una gráfica, verifica si el producto de los valores de las coordenadas de los puntos es constante).



**Consulta las páginas de tu libro de texto de Matemáticas 2 en las que se resuelvan problemas que se modelan con variaciones de proporcionalidad inversa, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos. Luego, reflexiona y contesta.**

- ¿Cómo es la gráfica de una variación de proporcionalidad inversa?
- ¿En qué otros contextos se resuelven problemas de variación de proporcionalidad inversa en tu libro de texto?



Ingresa en el sitio [http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/2esomatematicas/2quincena4/index2\\_4.htm](http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/2esomatematicas/2quincena4/index2_4.htm), selecciona "Regla de tres inversa" en "Proporcionalidad inversa". Analiza la información que presenta la página, el problema planteado y su solución. ¿Por qué la relación entre las magnitudes es inversamente proporcional?



**Resuelve y entrega tus respuestas al profesor para que evalúe tu aprendizaje.**

La máquina de un tren con doce vagones alcanza, en promedio, una rapidez de 87.5 km/h, pero cuando a la misma máquina le colocan quince vagones alcanza una rapidez promedio de 70 km/h.

- a) ¿Cuáles son las magnitudes involucradas en el planteamiento del problema?
- b) ¿La relación entre las magnitudes es directamente proporcional?, ¿por qué? ¿Es una relación de proporcionalidad inversa?, ¿por qué?
- c) ¿Qué rapidez promedio alcanza la misma máquina con veinticinco vagones?



**Juega con un compañero a la batalla de magnitudes.**

Por turnos, un compañero elige y dice una magnitud y el otro gana un punto si encuentra otra que sea directamente proporcional y gana dos puntos si encuentra una inversamente proporcional a la que el compañero eligió. Jueguen cinco rondas. Gana quien obtenga ¡más puntos!



**Ahora juega con tus familiares y amigos a la batalla de magnitudes. Explícales las reglas y con lo que aprendiste en esta ficha y la 7, orienta a tus contrincantes de juego sobre magnitudes directa e inversamente proporcionales.**

# Perímetro y área de figuras geométricas y expresiones algebraicas

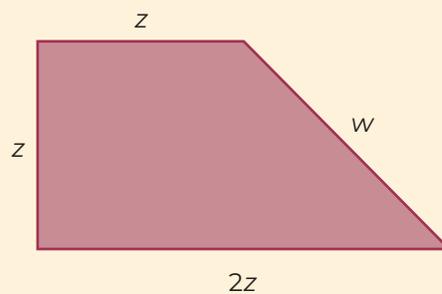
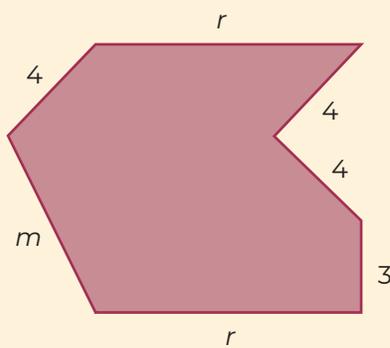
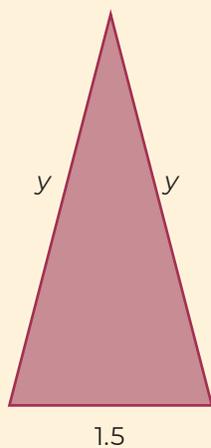
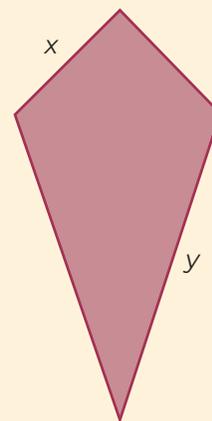
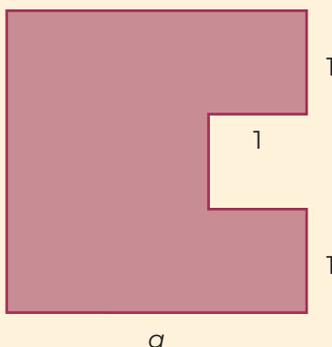
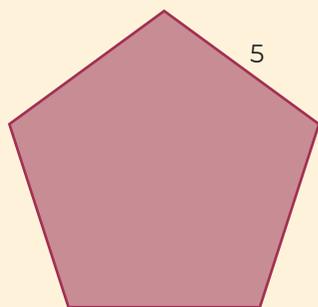
**Aprendizaje fundamental imprescindible.** Formula expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verifica equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geoméricamente (análisis de las figuras).

**Contenido específico.** Formula expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas.

## Materiales

- ✓ Libro de texto de Matemáticas 2.
- ✓ Hojas de cuadro chico.
- ✓ Lápices.
- ✓ Calculadora.
- ✓ Regla.
- ✓ Goma.

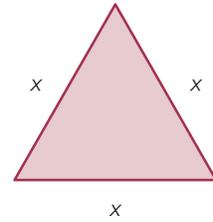
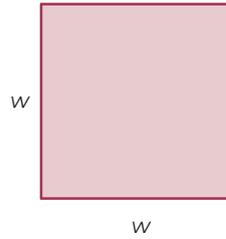
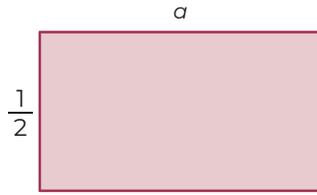
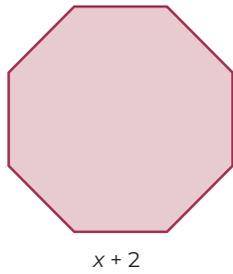
Analiza las figuras y contesta. Considera que las longitudes de los lados están dadas en centímetros.



- Describe el procedimiento que utilizarías para calcular el perímetro de las figuras.
- ¿Cuántos centímetros mide el perímetro del pentágono?
- Escribe una expresión algebraica que permita calcular el perímetro de cada figura.
- Si  $y = 2$ , ¿cuántos centímetros mide el perímetro del triángulo?
- Si  $z = 2$  y  $w = 3.5$ , ¿cuánto mide el perímetro del trapezoido?

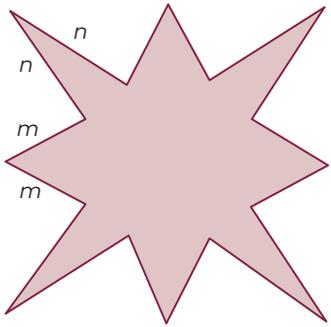


1. Escribe para cada figura dos expresiones algebraicas que representen su perímetro, una con una multiplicación y la otra con una suma. Considera que las longitudes están dadas en centímetros.



Expresión 1: \_\_\_\_\_ Expresión 1: \_\_\_\_\_ Expresión 1: \_\_\_\_\_ Expresión 1: \_\_\_\_\_  
 Expresión 2: \_\_\_\_\_ Expresión 2: \_\_\_\_\_ Expresión 2: \_\_\_\_\_ Expresión 2: \_\_\_\_\_

2. Identifica en las figuras cómo calcularías el perímetro y subraya las dos expresiones algebraicas distintas que lo representan.

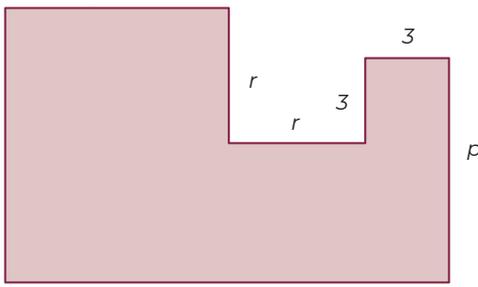


$8m + 8n$

$4m + 4n$

$8(m + n)$

$4(m + n)$



$6 + 4p + 2r + q$

$2(3 + 2p + r + q)$

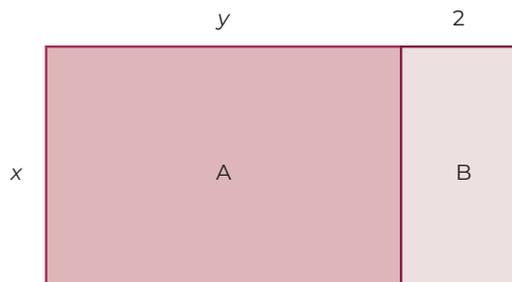
$2p + 2p + 6 + 2r + q$

$q + 2p + 3 + 2p + 2r$

3. Dibuja en tu cuaderno figuras geométricas cuyo perímetro se pueda encontrar con las siguientes expresiones algebraicas. Recuerda indicar las dimensiones de los lados.

- |                    |                |
|--------------------|----------------|
| a) $2x + 3$        | b) $5(x + y)$  |
| c) $2(a + b + c)$  | d) $4a$        |
| e) $x + y + z + w$ | f) $m + n + 5$ |

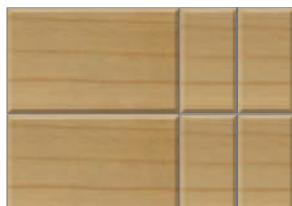
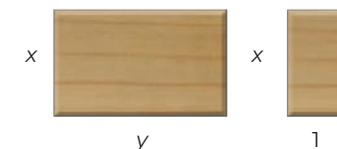
4. La figura está compuesta por rectángulos, cuyas longitudes están en centímetros. Analízala y contesta.



- a) Explica con palabras si la superficie de la figura queda totalmente cubierta por la superficie de los dos rectángulos que la componen.
- b) ¿Cuál es la medida del largo de la figura, compuesta por los rectángulos A y B?, ¿y cuál es la medida de su ancho?
- c) Expresa el área de la figura como el producto de las dimensiones del largo y ancho.
- d) ¿Cuál es el área de cada rectángulo (A y B) que componen la figura?
- e) Expresa al área de la figura como la suma de las áreas de los rectángulos que la conforman.

5. Analiza la situación y escribe de dos maneras distintas el área de cada figura.

Samuel compró un juego con piezas de madera para formar figuras. Observa las dimensiones de cada pieza.



Expresión 1: \_\_\_\_\_

Expresión 2: \_\_\_\_\_



Expresión 1: \_\_\_\_\_

Expresión 2: \_\_\_\_\_



Expresión 1: \_\_\_\_\_

Expresión 2: \_\_\_\_\_

6. Considera las piezas de madera de Samuel. Dibuja una figura cuya área se pueda representar por las siguientes expresiones algebraicas. Recuerda indicar las dimensiones de sus lados.

a)  $3xy + 3x$

b)  $(y + 2)(4x)$

c)  $xy + 4x$

El **área** total de una figura puede representarse como la suma del área de las figuras que la conforman. Observa el rectángulo, su base mide  $x + 2$  y su altura mide  $y$ .

Cálculo de área con fórmula:  $A = (x + 2)(y)$

Cálculo de área por suma de áreas  $A = xy + 2y$



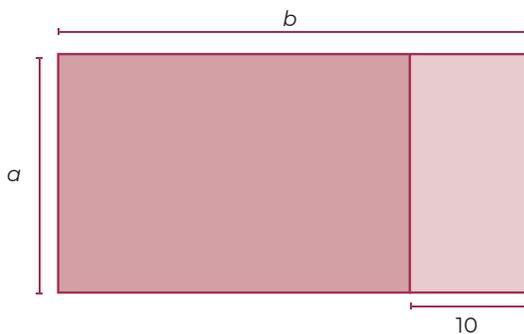


Consulta las páginas de tu libro de texto de Matemáticas 2 en las que se plantea el tema “Figuras geométricas y expresiones algebraicas” y contesta.

- Si  $6x + 12$  es la expresión algebraica para el perímetro de un hexágono regular, ¿cuánto mide su lado?
- Si  $xy + 2x$  es la expresión algebraica para el área de un rectángulo, ¿cuánto miden sus lados? ¿La solución es única?



Analiza la figura, cuya medida de los lados está dada en centímetros, y contesta. Entrega el trabajo a tu profesor para que lo evalúe.

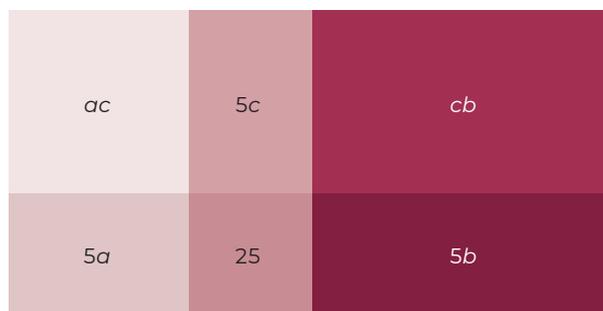


- Escribe una expresión algebraica que permita encontrar el perímetro de la figura.
- Escribe dos expresiones algebraicas que permitan encontrar el área de la figura: una como el producto de las dimensiones de su largo y su ancho, y la otra, como la suma de las áreas de las figuras que la conforman.

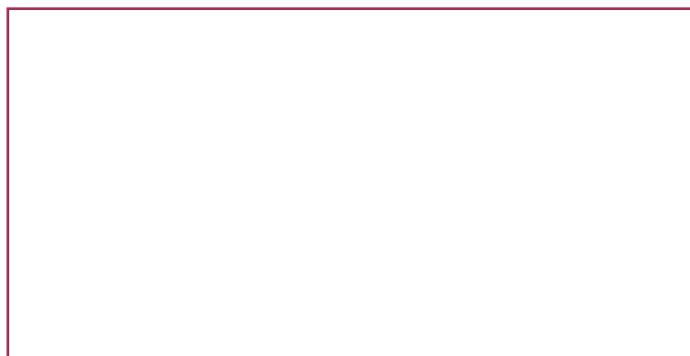


Resuelve el acertijo.

- Al centro de cada cuadrilátero que conforma el rectángulo mayor, se escribió la expresión que corresponde a su área. Encuentra una expresión algebraica para el perímetro del rectángulo mayor y otra para el área.



Divide la superficie del rectángulo e indica las dimensiones correspondientes en la figura de manera que las expresiones:  $x(a + b + 1)$  y  $2(x + a + b + 1)$  correspondan a su área y perímetro, respectivamente. Intercambia tu trabajo con una pareja y revisen la pertinencia de la subdivisión.



## Equivalencia de expresiones algebraicas

**Aprendizaje fundamental imprescindible.** Formula expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verifica equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geoméricamente (análisis de las figuras).

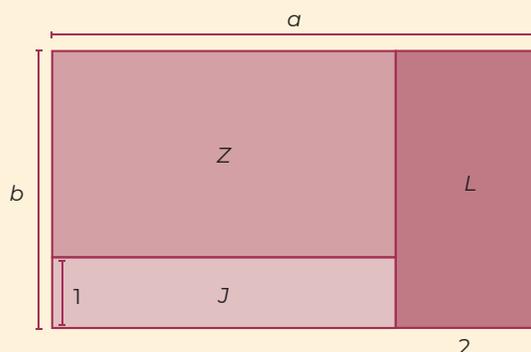
**Contenido específico.** Verifica equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geoméricamente (análisis de las figuras).

### Materiales

- ✓ Libro de texto de Matemáticas 2.
- ✓ Hojas de cuadro chico.
- ✓ Lápices.
- ✓ Calculadora.
- ✓ Regla.
- ✓ Goma.

### Analiza y contesta.

La imagen es el bosquejo de un terreno donde se cultivan zanahorias, jitomates y lechugas, en la cual se identifican con letras las distintas parcelas y señalan algunas de sus dimensiones.



- ¿Cómo expresarías el área de todo el terreno utilizando sus dimensiones?

Área del terreno: \_\_\_\_\_

- ¿Cuáles son las dimensiones de cada parcela y cómo expresarías sus áreas?

Área de L: \_\_\_\_\_ Área de J: \_\_\_\_\_ Área de Z: \_\_\_\_\_

- ¿Cuál es el área de todo el terreno si sumas las áreas de cada parcela?

Área como suma: \_\_\_\_\_

- Si el largo y el ancho del terreno miden 10 m y 6 m, respectivamente, ¿cuánto mide su área? \_\_\_\_\_

- Con las dimensiones dadas en el inciso anterior, ¿cuál es el área de cada parcela?

Área de L: \_\_\_\_\_ Área de J: \_\_\_\_\_ Área de Z: \_\_\_\_\_

- Comprueba que área de todo el terreno es igual a la suma de las áreas de las parcelas.



1. Considera las imágenes, analiza y contesta.

Para encontrar las expresiones del área y perímetro de cada figura, Juan utilizó las fórmulas correspondientes del rectángulo y del trapecio y Laura usó otro **método**.

Figura A

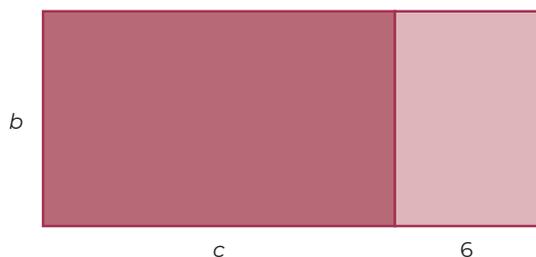
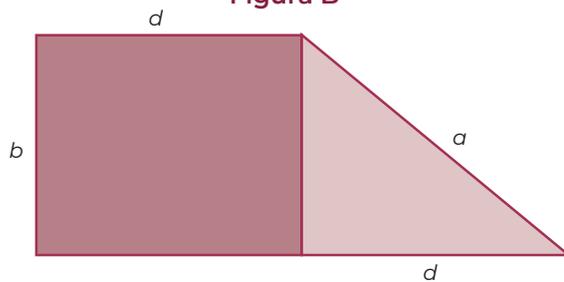


Figura B



Juan

Perímetro figura A:  $2b + 2(c + 6)$

Área figura A:  $b(c + 6)$

Perímetro figura B:  $b + d + a + 2d$

Área figura B:  $\frac{b(3d)}{2}$

Laura

Perímetro figura A:  $2b + 2c + 12$

Área figura A:  $bc + 6b$

Perímetro figura B:  $3d + b + a$

Área figura B:  $db + \frac{db}{2}$

Ahora, completa las tablas considerando los valores que se indican en cada columna y contesta.

Juan	Expresiones	$a = 5; b = 3$ $c = 6; d = 4$	$a = 13; b = 5$ $c = 10; d = 12$	$a = 10; b = 8$ $c = 12; d = 6$
Perímetro	A: $2b + 2(c + 6)$			
	B: $b + d + a + 2d$			
Área	A: $b(c + 6)$			
	B: $\frac{b(3d)}{2}$			

Laura	Expresiones	$a = 5; b = 3$ $c = 6; d = 4$	$a = 13; b = 5$ $c = 10; d = 12$	$a = 10; b = 8$ $c = 12; d = 6$
Perímetro	A: $2b + 2c + 12$			
	B: $3d + b + a$			
Área	A: $bc + 6b$			
	B: $db + \frac{db}{2}$			

- ¿Cómo son entre sí los valores de los perímetros que obtuvieron Juan y Laura?
- ¿Cómo son entre sí los valores de las áreas que obtuvieron Juan y Laura?
- Si  $a = 15, b = 9, c = 19$  y  $d = 12$ , ¿serán distintos entre sí los valores del área y perímetro que obtuvieron Laura y Juan? Explica tu respuesta.

- Con base en las respuestas anteriores, escribe los signos = o  $\neq$  en medio de las siguientes expresiones.

$$2b + 2(c + 6) \quad \square \quad 2b + 2c + 12$$

$$b(c + 6) \quad \square \quad bc + 6b$$

$$3d + b + a \quad \square \quad b + d + a + 2d$$

$$\frac{b(3d)}{2} \quad \square \quad db + \frac{db}{2}$$

Dos **expresiones algebraicas** que están escritas de manera distinta, pero que tienen el mismo valor numérico, sea cual sea el valor de las literales, son **equivalentes**. Por ejemplo, las expresiones:  $4(x + 3)$  y  $4x + 12$  son equivalentes porque al asignarle a la literal  $x$  el valor de 1, o cualquier otro número, se obtendrá una identidad.

$$4(1 + 3) = 4(1) + 12$$

$$4(4) = 4 + 12$$

$$16 = 16$$

$$4(2.5 + 3) = 4(2.5) + 12$$

$$4(5.5) = 10 + 12$$

$$22 = 22$$

$$4(-5 + 3) = 4(-5) + 12$$

$$4(-2) = -20 + 12$$

$$-8 = -8$$

Sin embargo, el hecho de que las expresiones sean equivalentes para algunos valores de las literales resulta una limitante, dado que hay infinidad de números para comprobar que se satisface la igualdad. Por lo que, para mostrar que dos expresiones son equivalentes, es necesario recurrir a las propiedades de las operaciones aritméticas, como la distributiva, y hacer transformaciones algebraicas:

$$4(x + 3) = 4x + 12$$

También se utiliza la propiedad conmutativa:  $a + b = b + a$ ;  $ab = ba$  y la propiedad asociativa:  $a + (b + c) = (a + b) + c$ ;  $(ab)c = a(bc)$ .

## 2. Escribe en el recuadro, F si la afirmación es falsa y V si es verdadera.

a)  $4m - 5n = 3m + n + m - 6n$

b)  $2a + 2b = 2(a + b)$

c)  $5(x + y + 1) = 5x + 5y + 1$

d)  $4(2a + 1) = 4a + 4a + 4$

e)  $w(x + y + 3) = wx + y + 3$

f)  $\frac{3b}{2} + \frac{3b}{2} = 3b$

## 3. Escribe dos expresiones equivalentes en cada caso.

a)  $2x + 5 + x + 3 =$  \_\_\_\_\_

b)  $xz + xz - xz - xz =$  \_\_\_\_\_

c)  $2(x + 2y + 3) =$  \_\_\_\_\_

d)  $2m(3n + p) =$  \_\_\_\_\_

e)  $\frac{a}{2} + 5b - 2a + \frac{2b}{3} =$  \_\_\_\_\_

f)  $y(x - 2z) + y(z + x) =$  \_\_\_\_\_

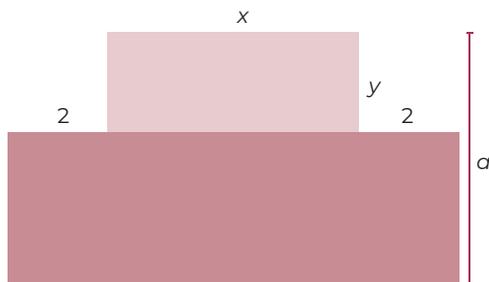


Consulta las páginas de tu libro de texto de Matemáticas 2 en las que se plantea el tema “Figuras geométricas y expresiones algebraicas” y contesta.

- Cuando se comprueba la equivalencia de dos expresiones algebraicas mediante la manipulación algebraica, ¿qué propiedades de la suma y la multiplicación se utilizan?



Considera la siguiente figura, lee y contesta. Entrega el trabajo a tu profesor para que lo evalúe.



- Encuentra una expresión algebraica para calcular el perímetro y otra para el área.
- Patricio encontró las siguientes expresiones:

$$P: 8 + 2x + 2a$$

$$A: a(x + 4) - 4y$$

- Decide si tus expresiones y las de Patricio son equivalentes, sustituyendo para algunos valores numéricos
- Muestra por medio de manipulaciones algebraicas si tus expresiones y las de Patricio son equivalentes.



Sombrea con el mismo color las tarjetas que contengan expresiones algebraicas equivalentes.

$$(a + 1)(b - 2)$$

$$2(ab + 1) + a$$

$$2b(2a + 4)$$

$$4b(a + 2)$$

$$3a - 6b + 9$$

$$3(a - b + 3)$$

$$2ab + a + 2$$

$$ab - 2a + b - 2$$

$$4ab + 8b$$

$$3a + 3b + 8$$

$$a(2b + 1) + 2$$

$$5 + a + 4b + 2a + 3 - b$$



Dibuja una figura geométrica y asigna literales a las longitudes de sus lados. Escribe una expresión algebraica para el área y otra para el perímetro. Comparte con una pareja y pídele que escriba otras expresiones que sean equivalentes a las tuyas.

# Un mundo tridimensional

**Aprendizaje fundamental imprescindible.** Calcula el volumen de prismas y cilindros rectos

**Contenido específico.**

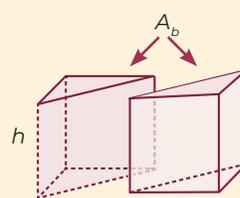
- Calcula el volumen de prismas rectos cuya base sea un polígono regular desarrollando y aplicando fórmulas.
- Calcula el volumen de cilindros rectos desarrollando y aplicando fórmulas.

**Materiales**

- ✓ Libro de texto de Matemáticas 2.
- ✓ Cuaderno y lápiz.
- ✓ Lápices de colores.
- ✓ Cajas de cartón con base rectangular.
- ✓ Palitos de paletas.
- ✓ Hojas de reúso.

**Analiza las figuras y responde .**

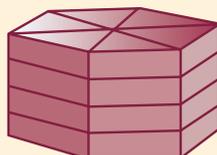
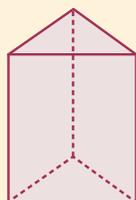
Si un prisma rectangular recto de volumen  $A_b \times h$  (donde  $A_b$  representa el área de la base del prisma y  $h$  el valor de la altura) se corta verticalmente por una de las diagonales de la base, como se muestra en la imagen, se obtienen dos **prismas triangulares rectos**.



Usar tu cuaderno

- Observa que el volumen del prisma triangular recto, es la mitad del volumen del prisma rectangular recto. Expresa algebraicamente esta relación.
- Utiliza la expresión algebraica que escribiste en el inciso a) y las propiedades de los números, con el propósito de obtener una fórmula para calcular el volumen de un prisma triangular recto.

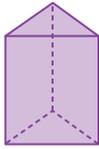
Observa las siguientes ilustraciones y obtén el volumen del prisma recto de base hexagonal a partir del volumen del prisma triangular recto. Para resolver el problema utiliza como guía las preguntas .



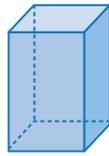
- ¿Cómo se calcula el volumen de un prisma triangular recto?
- ¿Cómo puedes descomponer un prisma recto cuya base es hexagonal en prismas triangulares rectos?
- Expresa algebraicamente el volumen del prisma hexagonal recto como una suma del volumen de los prismas triangulares rectos que lo componen. Luego, intenta aplicar propiedades numéricas que conozcas para simplificar la expresión que escribiste y obtener una fórmula para calcular el volumen de un prisma recto cuya base es hexagonal.
- Un estudiante expresa el volumen del prisma hexagonal recto en términos del volumen de los 6 prismas triangulares rectos que lo componen como  $A_{b_1}h + A_{b_2}h + A_{b_3}h + A_{b_4}h + A_{b_5}h + A_{b_6}h$ , donde cada  $A_b$  representa el área de la base de cada prisma triangular recto que compone el prisma hexagonal y  $h$  representa el valor de su altura. Simplifica esa expresión. Para eso considera la propiedad distributiva y que la suma de las áreas de las bases de los prismas triangulares es igual al área de la base del prisma hexagonal recto. ¿Qué expresión se obtiene?, ¿qué significado tiene?



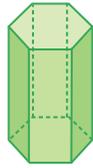
1. Con base en la siguiente ilustración, contesta las preguntas en tu cuaderno.



Prisma triangular



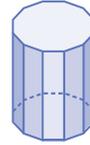
Prisma rectangular



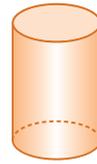
Prisma hexagonal



Prisma octagonal



Prisma decagonal



Cilindro

- a) Observa las bases de los prismas rectos con base un polígono regular. Conforme aumenta el número de lados, ¿a qué figura se van pareciendo?
- b) Conforme al número de caras de los prismas rectos de base un polígono regular aumenta, ¿a qué cuerpo se va pareciendo?
- c) Con base en tus observaciones de los incisos a) y b). ¿Cómo calcularías el volumen de un cilindro recto?

Consulta las páginas de tu libro de texto de Matemáticas 2 en las que se plantea el tema “Volumen de prismas y cilindros” y contesta.

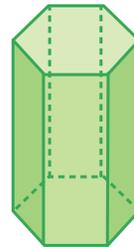
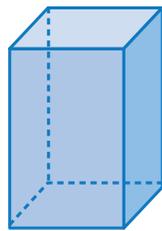
- ¿Qué procedimiento se sigue para obtener la fórmula que permite calcular el volumen de un cilindro recto?



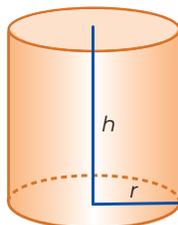
El volumen de cualquier objeto se define como la cantidad de espacio que ocupa. El volumen de un prisma recto está determinado por lo que mide el área de su base multiplicada por el valor de su altura.

Expresado algebraicamente:  $V = A_b \times h$ . Donde  $A_b$  representa el área de la base del prisma y  $h$  el valor de su altura.

Cuando la base de un prisma recto es un polígono regular, el área de la base se calcula multiplicando el valor del perímetro del polígono por el valor de la apotema y luego el producto se divide entre dos.



Cuando el cuerpo geométrico es un cilindro recto, entonces el área de la base es igual al valor de  $\pi$  por el valor del radio al cuadrado.



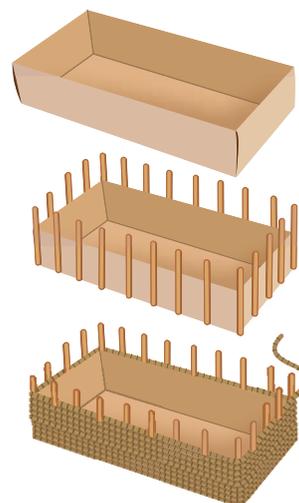


Responde las preguntas en tu cuaderno. Entrega el trabajo a tu profesor para que lo evalúe.

- ¿A qué concepto matemático y físico hace referencia el espacio que ocupa un cuerpo?
- ¿De qué valores depende el volumen de un prisma recto de base un polígono regular?
- ¿De qué valores depende el volumen de un cilindro recto?

**Utiliza una caja de cartón y haz lo que se indica.**

Corta la tapa de la caja y deja solamente la base y las cuatro caras laterales. Luego, pega los palos de paleta alrededor de la caja en forma perpendicular a la base, dejando el mismo espacio entre ellos, no menor a 1 cm y no mayor a 2 cm. Pega el lazo alrededor de la caja, de manera que cubra los palos de paleta. Cuando llegues a la altura de las caras de la caja, pasa el lazo enrollándolo en cada palito, sin jalarlo para que no se despegue, hasta que cubras la altura de los palos de madera. Al final pega ese extremo del lazo para que no se deshaga y coloca un listón o encaje en la orilla. Has construido un prisma recto rectangular funcional.



**Reúnete con algunos familiares o amigos y comparte con ellos el siguiente problema.**

**Luego, construyan las latas como se indica en las opciones del problema. No tienen que ser de las mismas medidas que se indican en el problema. Pueden utilizar hojas de reúso.**

En una fábrica se requiere construir una lata con forma de cilindro recto de manera que ocupe el mayor espacio posible. Para construir la lata, sin considerar las tapas, se utilizará una lámina rectangular de 35.6 cm de largo por 20 cm de ancho. ¿De qué manera se debe utilizar la lámina para que al armar la lata, ésta tenga el mayor volumen posible? Selecciona una opción.



#### Opción A

El cilindro debe construirse uniendo los lados más largos de la lámina, porque así el cilindro es más alto y, por lo tanto, ocupará más espacio.

#### Opción B

Si el cilindro se construye uniendo los lados más cortos de la lámina, ocupa el mismo espacio que si se construye uniendo los lados más largos. Esto es así, porque la lámina siempre tendrá la misma área.

#### Opción C

Si para cada una de las formas de construir el cilindro se toma la medida de la distancia perpendicular entre las dos bases (es decir, la altura) y luego se calcula el área de cada base, se puede concluir que el de menor altura ocupará mayor espacio.

# Prismas y cilindros

**Aprendizaje fundamental imprescindible.** Calcula el volumen de prismas y cilindros rectos.

**Contenido específico.**

- Calcula el volumen de prismas rectos cuya base sea un polígono regular desarrollando y aplicando fórmulas.
- Calcula el volumen de cilindros rectos desarrollando y aplicando fórmulas.

**Materiales**

- ✓ Libro de texto de Matemáticas 2.
- ✓ Cuaderno y lápiz.
- ✓ Lápices de colores.
- ✓ Plastilina.
- ✓ Palitos de madera.
- ✓ Hojas de reúso.
- ✓ Equipo de cómputo, celular o tableta con acceso a internet.



**Analiza las situaciones y responde.**

Ana y Beto requieren comprar un contenedor para conservar en mejores condiciones el cereal que consumen. Cada uno elige un contenedor distinto, como se muestra en las imágenes. Sin embargo, ellos sólo pueden comprar uno, y debe ser el de mayor volumen. ¿Cuál es el volumen del contenedor que Ana elige? ¿Cuál es el volumen del contenedor de Beto? Usa las siguientes preguntas para resolver el problema..



- ¿Cuáles son las medidas conocidas de cada envase y cuáles son las desconocidas?
- Escribe una fórmula que relacione los datos del problema y sustituye en ella los valores de las medidas conocidas.
- Haz las operaciones correspondientes para obtener el valor de la cantidad desconocida.

Un silo es un depósito, comúnmente en forma de cilindro recto, para almacenar grandes cantidades de granos como el trigo, maíz o sorgo, después de cosecharlos. Si un silo con estas características tiene  $502.4 \text{ m}^3$  de volumen y el diámetro de su base mide 8 m, ¿cuánto mide su altura?

- ¿Cuáles son los valores de las medidas conocidas y cuáles son desconocidas?
- Escribe una fórmula que relacione los datos proporcionados en el problema y luego, sustituye los valores conocidos.
- Resuelve la ecuación para obtener el valor desconocido. Sustituye ese valor en la ecuación que obtuviste en el paso anterior para verificar que se cumple la igualdad.



**Consulta las páginas de tu libro de texto de Matemáticas 2 en las que se plantea el tema “Volumen de prismas y cilindros”. Observa que se plantean problemas que implican calcular el volumen de prismas y cilindros conociendo el valor de la medida de la altura, del radio o del lado del polígono base o del área del polígono, según corresponda, así como también se plantean problemas en los que se conoce el volumen y se requiere determinar el valor de alguna de las medidas involucradas en su cálculo.**

- ¿Cuáles son las semejanzas y diferencias al resolver estos dos tipos de problemas?



- Un diseñador hace algunos cambios a las medidas de un envase que tiene forma de cilindro recto. Disminuye la medida de la altura del envase en 20% y la medida del radio de la base la aumenta en 50%. ¿En qué porcentaje varía el volumen del nuevo envase con respecto al original? Para responder, guíate por lo siguiente.
  - Expresa el valor del radio con una letra y 50% con una fracción. Luego, expresa algebraicamente que “la medida del radio aumenta 50%”.
  - Si disminuye 20% la medida original de la altura, ¿qué porcentaje representa la nueva medida respecto a la original? ¿Cómo expresarías algebraicamente 80% de la altura?
  - En la fórmula para calcular el volumen de cilindros rectos, sustituye las expresiones que obtuviste para el radio y la altura, haz las operaciones correspondientes y contesta la pregunta del problema.

- Un envase de un litro de leche debe tener las características que se muestran en la imagen.

¿Cuál es su altura?

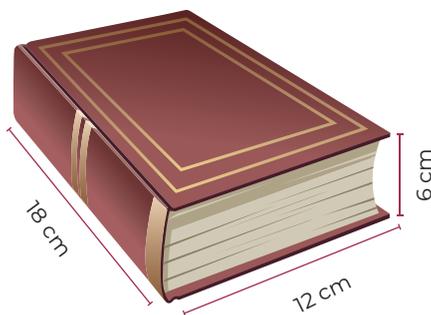
Haz lo siguiente para responder.

- Investiga a cuántos centímetros cúbicos es equivalente un litro.
- Aproxima las cifras decimales al siguiente número entero mayor.



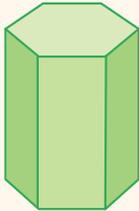
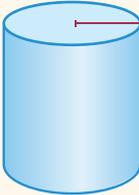
$V = 1$  litro

- ¿Cuántos libros, como el que se muestra en la imagen, caben en una caja cuyo volumen es de  $10 \text{ dm}^3$ ?



- Escribe los datos faltantes de la tabla. Algunas medidas son aproximadas.

	Perímetro de la base	Área de la base	Altura	Volumen
				$52.2 \text{ cm}^3$

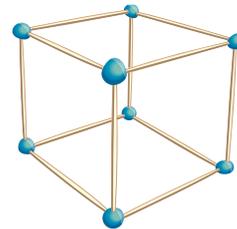
	Perímetro de la base	Área de la base	Altura	Volumen
 <p>L = 6 cm</p>		93.6 cm <sup>2</sup>	10 cm	
 <p>Radio = 5 cm</p>				706.5 cm <sup>3</sup>

Cuando en el planteamiento de un problema no se dan todos los datos para obtener directamente la respuesta, se sugiere determinar si de manera indirecta se puede obtener esos datos. Una vez que se haya determinado lo anterior, se recurrirá a las fórmulas conocidas, para que con base en ellas –y mediante un despeje algebraico– se obtengan los valores desconocidos.

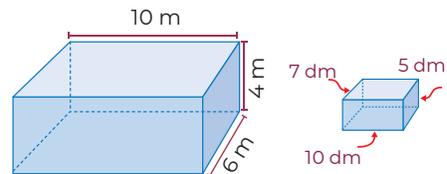


**Construye las figuras con palitos de madera y plastilina. Entrega el trabajo a tu profesor para que lo evalúe.**

- Un cubo cuyo volumen sea de 27 cm<sup>3</sup>.
- Un prisma rectangular recto cuya área de la base sea de 30 cm<sup>2</sup> y su volumen sea de 210 cm<sup>3</sup>.



**Reúnete con algunos familiares o amigos y resuelvan esta actividad.** Se tiene una habitación con las medidas que se muestran en la siguiente figura. Se desea colocar 500 cajas en esa habitación. Las medidas de las cajas son 10 dm de largo, 7 dm de ancho y 5 dm de alto. ¿Cabrán?, ¿cuántas sobran o cuántas faltan para llenar esa habitación?



Para conocer más sobre el concepto y el cálculo de los volúmenes de prismas y cilindros rectos, contesta las siguientes preguntas:

Si el volumen de un prisma recto tiene cierto valor, ¿qué pasa con el volumen si aumenta al doble su altura, y su base permanece constante?

Y, ¿qué sucede con su volumen, si el área de su base aumenta al doble, pero su altura permanece igual?

## Medidas de tendencia central, rango y desviación

**Aprendizaje fundamental imprescindible.** Usa e interpreta las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos y decide cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión.

**Contenido específico.** Usa e interpreta las medidas de tendencia central, el rango y la desviación media en un conjunto de datos y decide cuál de ellas conviene más.

### Materiales

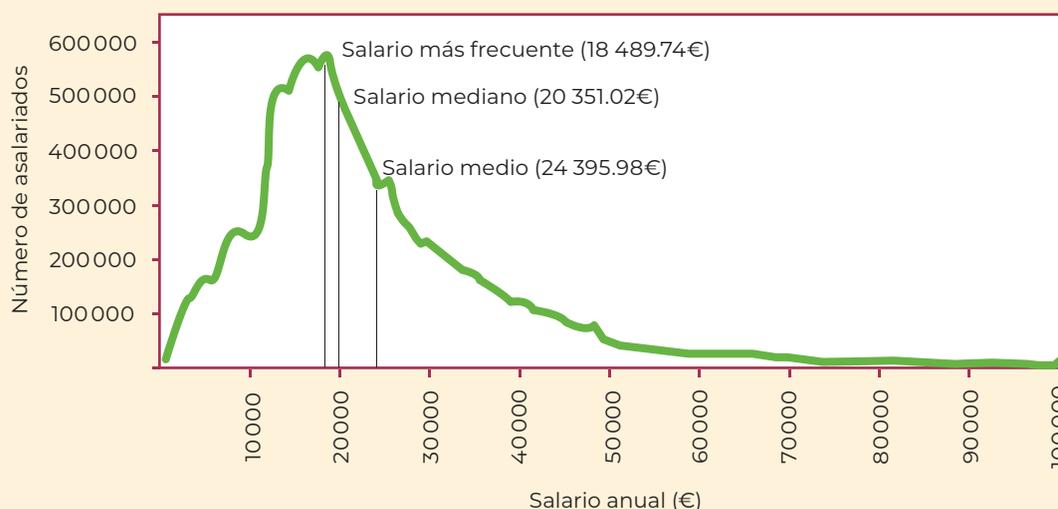
- ✓ Libro de texto de Matemáticas 2.
- ✓ Hojas de cuadro chico.
- ✓ Lápices.
- ✓ Calculadora.
- ✓ Goma.

### Analiza la información y responde en tu cuaderno.

La profesora Mónica estaba buscando información para explicar a sus alumnos de segundo grado las medidas de tendencia central, en el buscador de internet ella encontró un artículo titulado “Media, mediana y moda; versión a ver si así aprenden a aplicarlas cuando hablan de salarios”, se interesó por esa relación y encontró una gráfica que corresponde al nivel salarial de los trabajadores en España para 2019.



### Distribución del salario bruto anual. 2019



Fuente: Instituto Nacional de Estadística (INE), Encuesta Anual de Estructura Salarial – Año 2019, [https://www.ine.es/prensa/ees\\_2019.pdf](https://www.ine.es/prensa/ees_2019.pdf)

**Comparó la gráfica con la información del artículo, ahí se menciona que normalmente se presenta como dato representativo el salario promedio, pero éste puede no estar representando adecuadamente los datos.**

- En la gráfica, ¿qué dato corresponde a la moda?, ¿qué representa?
- La mediana es 20 351.02€, ¿qué nos indica este dato?
- El salario promedio es 24 395.98€, ¿cómo se calcula este dato?
- ¿Qué medida de tendencia central representa mejor los datos? Explica tu respuesta.



1. Analiza los conjuntos de datos con los salarios mensuales de los trabajadores en dos instituciones y responde o haz lo que se pide.

Institución 1					
\$8 000	\$8 000	\$8 000	\$8 000	\$8 000	\$8 000
\$15 000	\$15 000	\$15 000	\$35 000	\$35 000	\$55 000

Institución 2					
\$10 000	\$10 000	\$10 000	\$10 000	\$15 000	\$15 000
\$15 000	\$15 000	\$20 000	\$20 000	\$30 000	\$30 000

- Calcula la media aritmética, la moda y la mediana en cada caso.
- En la institución 1, ¿cuántos datos son menores que la media?, ¿cuántos son mayores?
- En la institución 2, ¿cuántos datos son menores que la media?, ¿cuántos son mayores?
- En cada Institución, ¿cuántos datos son menores que la mediana y cuántos son mayores?
- ¿Qué ocurre con la moda para la Institución 2?
- ¿Qué medida de tendencia central representa mejor a los datos en cada caso? Explica tu respuesta.
- ¿Cuál es la diferencia entre el salario menor y el mayor en la institución 1?
- ¿Cuál es la diferencia entre el salario menor y el mayor en la institución 2?
- Escribe una comparación entre los salarios de las dos instituciones, utiliza para el análisis las medidas de tendencia central y la diferencia entre los salarios menor y mayor.

2. Analiza la situación y responde en tu cuaderno.

La familia de Santiago se dedica a la producción de manzanas y tienen un contrato para venderlas en una cadena de supermercados. El acuerdo es que cada fruta pese entre 180 g y 210 g. Luisa es la encargada del equipo que supervisa el peso de las manzanas para que sólo se empaqueten las que cumplen con el peso indicado y antes de enviarlas se hace una inspección al azar para verificar que las piezas tengan el peso correcto. En una de esas revisiones se abrieron dos cajas que proceden de huertas diferentes.

**Caja de la huerta 1. Peso de las manzanas en gramos:**

181, 183, 184, 190, 196, 197, 205, 197, 207, 194, 200, 184, 199, 204 y 210.

**Caja de la huerta 2. Peso de las manzanas en gramos:**

190, 203, 205, 203, 201, 203, 201, 203, 202, 202, 205, 202, 207, 208 y 190.

- Calcula el promedio del peso de las manzanas en cada caja.
- ¿En cuál de las dos cajas el peso promedio es mayor?
- ¿Cuál es la diferencia entre el peso mayor y el peso menor en la caja de la huerta 1?
- ¿Cuál es la diferencia entre el peso mayor y el peso menor en la caja de la huerta 2?
- ¿En cuál de las cajas los pesos de las manzanas están más dispersos? Explica cómo lo determinaste.

### 3. Analiza la situación y responde en tu cuaderno.

El supermercado reportó que algunas cajas contenían manzanas con el peso más disperso y esta situación dificultaba su comercialización, ya que había manzanas de diversos tamaños. Para argumentarlo enviaron los pesos de las manzanas de dos cajas

#### Caja A. Peso de las manzanas en gramos:

180, 183, 185, 189, 192, 194, 195, 197, 201, 204, 207, 207, 208, 209, 210.

#### Caja B. Peso de las manzanas en gramos:

180, 192, 194, 195, 195, 196, 197, 199, 199, 200, 200, 201, 201, 202, 210.

- ¿En cuál de las dos cajas los pesos de las manzanas están menos dispersos? Explica cómo lo determinaste.
- Calcula la diferencia entre el mayor y el menor de los datos para cada caso.
- Calcula el peso promedio de las manzanas en cada caja.

### 4. Considera los datos de las cajas A y B. Completa la tabla y responde en tu cuaderno.

Para completar la tabla determina la diferencia del peso de cada manzana respecto al peso promedio (considera siempre el valor absoluto de la diferencia).

Caja A	Peso Promedio							
Peso	180	183	185	189	192	194	195	197
Diferencia con el promedio								
Peso	201	204	207	207	208	209	210	
Diferencia con el promedio								

Caja B	Peso Promedio							
Peso	180	192	194	195	195	196	197	199
Diferencia con el promedio								
Peso	199	200	200	201	201	202	210	
Diferencia con el promedio								

- Determina el promedio (o media aritmética) de las diferencias para la caja A y la caja B.
- ¿En cuál de los dos casos el promedio de las diferencias es menor?
- En el contexto de la situación, explica qué significa que el promedio de las diferencias sea menor para una de las cajas.
- Indica dos cajas de quince manzanas en las que el promedio de las diferencias sea cero. ¿Qué tiene que ocurrir para que así sea?
- A partir del promedio de las diferencias, ¿en cuál de las cajas los pesos de las manzanas están menos dispersos?
- ¿Qué aspecto necesita ajustar la empresa productora de manzanas para mantener uniforme el peso de éstas.

Para un conjunto de datos numéricos el **rango** es la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de los datos. El rango es una medida que sólo tiene en cuenta los valores extremos sin considerar los valores intermedios ni cómo están distribuidos los datos.

Para un dato  $x$  en un conjunto de datos numéricos la **desviación** de  $x$  es el valor absoluto de la diferencia entre  $x$  y la media aritmética o promedio del conjunto (representada como  $\bar{x}$ ). Es decir, desviación de  $x = |x - \bar{x}|$

La desviación media de un conjunto de datos numéricos es el promedio (o media aritmética) de las desviaciones de todos los datos. Esta medida indica la mayor o menor concentración de los datos en torno al promedio del conjunto y proporciona información respecto a qué tan dispersos están los datos.

La desviación media es igual a cero sólo cuando todos los datos del conjunto tienen el mismo valor.

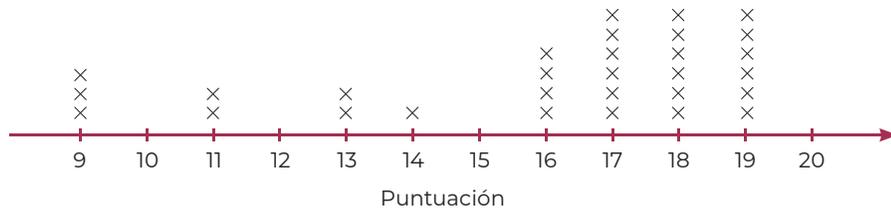
**5. Analiza la situación y responde en tu cuaderno.**

Las puntuaciones de dos jugadores de baloncesto se muestran en las gráficas. Cada marca corresponde a los puntos que hicieron en un partido de la temporada.

Jugador 1



Jugador 2



- ¿Cuál es el rango para cada uno de los conjuntos de datos?
- Calcula la media aritmética y la mediana para cada conjunto de datos.
- ¿Cuál es la desviación media para el jugador 1?
- ¿Cuál es la desviación media para el jugador 2?
- Comparen las dos desviaciones medias obtenidas, ¿en qué conjunto de datos es menor?, ¿qué indica esto?

Al comparar dos conjuntos de datos numéricos podemos usar las medidas de dispersión para analizar las diferencias y semejanzas, el rango es útil para comparar el tamaño de intervalo en el que están los datos y la desviación media es útil para estudiar la dispersión de cada conjunto y conocer cómo se distribuyen los datos.

- Cuando la medida de dispersión es mayor, el grupo de datos es más heterogéneo, es decir, presenta diversidad.
- Cuando la medida de dispersión es menor, el grupo de datos es más homogéneo, es decir, presenta uniformidad.

## 6. Analiza la situación y responde en tu cuaderno.

En una clínica de salud se lleva a cabo una campaña para hacer conciencia sobre los riesgos de la mala alimentación. Unos de los temas de la campaña fue la importancia de que las personas adultas verifiquen el nivel de colesterol en la sangre; ya que un nivel alto aumenta las posibilidades de padecer enfermedades cardíacas y cerebrovasculares. Dado que no presenta síntomas, es importante hacer una prueba de colesterol antes de los 35 años en hombres y 45 en mujeres.

Un examen clínico de colesterol consiste en obtener una muestra de sangre del paciente con el objetivo de determinar los miligramos por decilitro (mg/dL); para valorar los resultados se usa una tabla como la siguiente:

Nivel de colesterol en mg/dL (a)	
Deseable	$a \leq 200$
Límite superior del rango normal	$200 < a < 240$
Riesgo alto	$240 \leq a$

Una brigada de la clínica de salud hizo exámenes de colesterol en la comunidad y obtuvo los siguientes resultados.

### Nivel de colesterol (mg/dL):

179, 150, 157, 172, 328, 165, 195, 150, 178, 150, 149, 173, 182, 170, 180, 402, 159, 172, 149, 160.

- Calcula la media aritmética, la mediana y la moda para el conjunto de datos.
- ¿Qué valores extremos afectan más a la media aritmética?
- ¿Qué valor es mayor, la media o la mediana?
- Calcula el rango y la desviación media del conjunto de datos.
- ¿Qué tan dispersos están los resultados de los exámenes?
- ¿Cuál de las medidas de tendencia central representa mejor a la población estudiada?
- Escribe una conclusión respecto a la condición de salud de esta población.

### Consulta las páginas de tu libro de texto de Matemáticas 2 en las que se plantea el tema “Medidas de tendencia central” y contesta.

- Escribe las características principales de las medidas de tendencia central (media aritmética, mediana y moda).
- Si en un conjunto de datos numéricos la media aritmética es mayor que la mediana, ¿qué se puede decir acerca del conjunto?
- ¿Qué ocurre si en un conjunto de datos la media, la mediana y la moda son iguales?
- Describe la relación entre el rango y la desviación media.



Ingresa a la página: [https://programas.cuaed.unam.mx/repositorio/moodle/pluginfile.php/860/mod\\_resource/content/3/contenido/index.html](https://programas.cuaed.unam.mx/repositorio/moodle/pluginfile.php/860/mod_resource/content/3/contenido/index.html), revisa la información y utiliza los recursos interactivos.

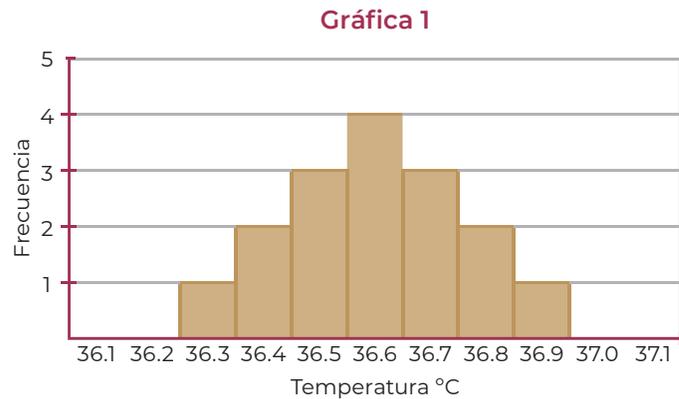




**Lee y contesta. Entrega tu trabajo a tu maestro para que lo evalúe.**

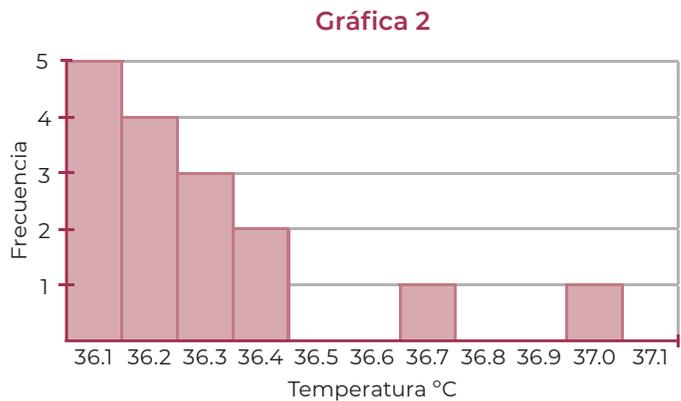
Una brigada de salud tomó la temperatura corporal a un grupo de estudiantes de segundo grado y estos fueron los resultados.

- ¿A cuántos estudiantes se les hizo la prueba?
- Haz una lista con las temperaturas representadas en la gráfica.
- Calcula las medidas de tendencia central y las de dispersión para esos datos.
- En la gráfica 1, traza una línea recta en el valor de cada medida de tendencia central.
- ¿Qué medida de tendencia central es la más representativa para el grupo de valores?



Se midió la temperatura corporal a otro grupo de estudiantes y se representaron los resultados en la gráfica 2.

- Calcula las medidas de tendencia central y las de dispersión para esos datos.
- Representa las medidas de tendencia central sobre la gráfica.
- Analiza los datos que están aislados. ¿A qué medidas de tendencia central afectan estos valores? ¿Cómo se relaciona con las medidas de dispersión?
- Compara los dos grupos. Observa las formas de las gráficas. ¿Qué relación hay entre las medidas de dispersión y la gráfica?



**Organízate en equipo con familiares o con varios amigos que vivan cerca de tu casa.**

**Lleven a cabo la siguiente práctica.**

- Con una cinta métrica, midan la longitud entre las puntas de sus dedos cuando tienen los brazos extendidos.
- Repitan esta medición por lo menos con veinte personas, pueden ser vecinos u otros familiares.
- Organicen la información y hagan una tabla.
- Explica a tu equipo cuáles son las medidas de tendencia central y las de dispersión y cómo se calculan.
- Describan el conjunto de datos con base en las medidas de tendencia central y de dispersión y encuentren un valor que sea representativo.

## Probabilidad teórica

**Aprendizaje fundamental imprescindible.** Determina la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.

**Contenido específico.** Identifica y determina la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio y la distingue de la probabilidad frecuencial.

### Materiales

- ✓ Libro de texto de Matemáticas 2.
- ✓ Cuaderno.
- ✓ Lápices.
- ✓ Hojas blancas.
- ✓ Calculadora.

### Analiza la situación y responde en tu cuaderno.

Fernando y sus amigos participan en un juego de mesa en el que se lanza un dado de seis caras, como el de la imagen. Él ganará si obtiene 6 en el próximo tiro, pero piensa que es más difícil obtener este número que los demás. Fernando ha llevado registro de los resultados del juego.



### Registro de resultados de 50 lanzamientos

Resultado	1	2	3	4	5	6
Frecuencia absoluta	11	7	9	9	8	6



- Con base en la tabla, ¿cuántos eventos favorables tuvo cada resultado?
- ¿Cuál es la frecuencia relativa de cada resultado?
- Traza un polígono de frecuencias con base en tus resultados anteriores. ¿Qué relación hay entre la probabilidad y la gráfica que dibujaron?



- Con base en la información de la tabla, ¿cuál es la probabilidad frecuencial de obtener cada resultado? Haz las operaciones.
- ¿Qué relación hay entre la probabilidad y las gráficas que trazaron?
- Si consideras el número total de los números que aparecen en el dado y las veces que se muestran él, ¿cuál es la probabilidad frecuencial de obtener cada resultado? Elabora las operaciones.
- ¿Cuál es la probabilidad teórica de obtener 1, 2, 3, 4, 5 o 6? Explica cómo la obtienes.
- Con base en lo anterior, ¿algún número tendrá más probabilidad de obtenerse? Explica.



1. Bárbara y Carlos juegan a lanzar un dado de seis caras. El dado es legal, es decir, no está cargado. Por turnos, cada uno lo lanza y si los puntos de la cara superior del dado son 1 o 6, gana Bárbara; y si son 2 o 5, gana Carlos. Responde en tu cuaderno.

Usa calculadora.

- ¿Se puede predecir, antes de hacer un lanzamiento, el resultado que se obtendrá?, ¿por qué?
- ¿En qué consiste el experimento? ¿Qué tipo de experimento es?, ¿por qué?
- ¿Cuántos y cuáles son todos los posibles resultados que se pueden obtener en un lanzamiento?
- Los resultados de los últimos lanzamientos efectuados fueron 5, 6, 6, 4, 2, 6, 5, 4, 1, 2, 1, 6, 2, 4, 4, 3, 4, 3, 2, 2, 3, 5, 2, 2 y 3. Con base en esta información completa la tabla.

### Registro de los resultados

Evento	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa (expresada como fracción)	Frecuencia relativa (expresada como decimal)	Porcentaje
Cae 1 o 6				
Cae 2 o 5				
Cae 3 o 4				
Total				

- Con base en la información de la tabla anterior, ¿cuáles y cuántos fueron los resultados favorables para Bárbara?, ¿y para Carlos?
- ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de que gane Bárbara?, ¿y de que gane Carlos?, ¿y de que ninguno gane?

Un experimento es la reproducción de un fenómeno en condiciones específicas, lo que permite controlar o modificar los aspectos de interés. Si sabemos de antemano el resultado, entonces se trata de un experimento determinista, por ejemplo, si soltamos un dado desde cierta altura, éste caerá al suelo. Si no es posible saber el resultado de antemano, se dice que es aleatorio, por ejemplo, al lanzar un dado no podemos saber con absoluta certeza si caerá 1, 2, 3, 4, 5 o 6.

A los grupos de resultados de un experimento aleatorio que tienen una característica común se les denomina *evento*. Los eventos favorables son las veces en que se obtiene el caso deseado en un experimento aleatorio. Por ejemplo, en un dado numerado del 1 al 6, si el caso deseado es: "Obtener número par", los resultados favorables son tres: el 2, el 4 y el 6.

La probabilidad es el grado de certeza que se tiene de que ocurra un evento en un experimento aleatorio. Con la probabilidad frecuencial se mide la probabilidad con la que se obtuvo un resultado (evento) después de que se llevó a cabo un experimento un número determinado de veces. Se calcula dividiendo la frecuencia con la que ocurre el evento entre el número de veces que se hace el experimento:

$$\text{Probabilidad frecuencial} = \frac{\text{Número de veces que se obtiene un resultado}}{\text{Número de veces que se hace el experimento}}$$

La probabilidad puede expresarse mediante una fracción, un decimal o un porcentaje.

2. Sandra ha diseñado un juego para una campaña publicitaria de una cadena de cines. Consiste en que el jugador haga girar dos ruletas, que son legales, cada una dividida en seis sectores con la misma área y numerados del 1 al 6. Si al terminar de girar los dos números señalados son iguales, el jugador gana un boleto para el cine; si son pares, gana unas palomitas; y si son impares, gana un refresco. Responde en tu cuaderno. Usa calculadora.



- a) ¿En qué consiste el experimento?, ¿qué tipo de experimento es?, ¿por qué?
- b) ¿Cuáles y cuántos son los posibles resultados del experimento? Completa una tabla de doble entrada como la siguiente para determinarlos.

		Ruleta 1					
		1	2	3	4	5	6
Ruleta 2	1	(1, 1)					
	2						
	3						
	4						
	5						
	6						

- c) Los resultados de los últimos participantes fueron (2, 2), (1, 3), (5, 2), (1, 6), (1, 4), (6, 4), (2, 3), (2, 4), (2, 2), (6, 5), (4, 5), (3, 5), (5, 6), (1, 6), (3, 2), (4, 4), (6, 4), (1, 2), (2, 2), (4, 6), (2, 6), (1, 6), (3, 4), (3, 3) y (6, 2). Con base en esta información completa la tabla.

Evento	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa (Expresada como fracción)	Frecuencia relativa (Expresada como decimal)	Porcentaje
Números iguales				
Números pares				
Números impares				
Otra combinación				
Total				

- d) ¿Cuáles y cuántos fueron los eventos favorables para cada evento?
- e) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de ganar un boleto de cine?, ¿y de ganar unas palomitas?, ¿y de ganar un refresco?, ¿y de no ganar algo?
- f) A Sandra le han pedido cambiar en su diseño de juego una ruleta por una perinola legal numerada del 1 al 8, pero conservando los mismos eventos. Los nuevos resultados de los últimos participantes fueron (5, 3), (6, 2), (4, 8), (5, 8), (6, 2), (5, 2), (2, 1), (1, 6), (4, 1), (3, 2), (1, 6), (4, 2), (4, 5), (4, 2), (1, 8), (3, 2), (3, 7), (5, 8), (3, 3), (3, 1), (1, 3), (1, 8), (3, 2), (2, 5), (1, 6). ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de ganar un boleto de cine?, ¿y de ganar unas palomitas?, ¿y de ganar un refresco?, ¿y de no ganar algo?
- g) Con base en la probabilidad frecuencial de ambos juegos, ¿cuál conviene más?

3. Héctor encontró algunos juegos de mesa en la casa de su abuela. Entre ellos hay unos dados muy curiosos, como los que se muestran en la imagen. A cada uno le dio el nombre de una “D” seguida del número de caras. Así quedaron nombrados como D4, D6, D8, D12 y D20. Como le gustaron tanto efectuó muchas tiradas y registró los resultados en las tablas que se muestran. Responde en tu cuaderno. Usa calculadora.



Registro de datos.

Evento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia D4	15	32	21	32	-	-	-	-	-	-
Frecuencia D6	18	14	16	13	18	21	-	-	-	-
Frecuencia D8	19	16	16	11	10	11	10	-	-	-
Frecuencia D12	4	10	7	6	7	5	7	9	14	11
Frecuencia D20	5	1	4	5	5	4	3	1	9	2

Evento	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia D4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Frecuencia D6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Frecuencia D8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Frecuencia D12	6	14	-	-	-	-	-	-	-	-
Frecuencia D20	8	7	7	3	5	5	6	5	6	9

- a) Con base en las tablas anteriores, ¿cuál es la probabilidad frecuencial de obtener cada evento para cada dado? Haz las operaciones.
- b) Antes de lanzar el dado D12, ¿cuál es la probabilidad de obtener cada uno de los números?, ¿cómo se calcula? Haz dos tablas con las anteriores con la probabilidad para cada dado.
- c) Con base en lo anterior, ¿en qué se distinguen y asemejan los dos procedimientos?
- d) ¿Qué probabilidad te parece mejor usar para la probabilidad que caiga cierto número de cada dado?, ¿por qué?

La probabilidad teórica se define como el número de resultados favorables que puede tener un evento específico entre el número total de resultados posibles. Puede expresarse mediante un número decimal entre 0 y 1; o en porcentaje entre 0 y 100.

$$\text{Probabilidad teórica} = \frac{\text{Número de resultados favorables de un evento}}{\text{Número total de resultados posibles}}$$

En el cálculo de la probabilidad teórica no se llevan a cabo experimentos, como ocurre con la probabilidad frecuencial, basta con conocer los resultados posibles del experimento aleatorio y deducir la probabilidad de los resultados favorables.

4. Sofía ha fabricado una perinola legal con resina. La ha decorado con números de colores como se muestra en la imagen. Quiere calcular la probabilidad teórica de los posibles eventos para diseñar las reglas de un juego en el que se use la perinola. Responde en tu cuaderno.



- a) ¿Cuáles y cuántos son todos los resultados que se pueden obtener al tirar la perinola?  
 b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener los eventos mostrados en la tabla? Complétala para responder.

Evento	Resultados favorables	Probabilidad teórica (fracción)	Probabilidad teórica (decimal)	Probabilidad teórica (porcentaje)
Que salga un 1				
Que salga un 2				
Que salga un 3				
Que salga un 4				
Que salga un número rojo				
Que salga un número amarillo				
Que salga un 1 amarillo				
Que salga un 2 rojo				

5. Para un concurso de televisión se tiene una urna opaca con esferas del mismo tamaño numeradas del 0 al 99. La mecánica consiste en sacar una esfera, mirar el número y volverla a meter en la urna. Calcula la probabilidad teórica de cada evento. Responde en tu cuaderno.

- a) El número es par.  
 b) El número es impar.  
 c) El número es menor que 100.  
 d) El número es múltiplo de 5 y menor que 50.  
 e) El número contiene al menos un 4 en sus cifras.  
 f) La suma de las cifras del número es mayor o igual a 20.

6. Sandra tiene algunas fichas de colores como se muestran en la imagen. Las ha metido dentro de una bolsa negra y le ha pedido a su hermano Érik que saque algunas sin ver. Responde en tu cuaderno.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera ficha que saque de la bolsa sea verde, roja o blanca?  
 b) Si Érik no regresa la ficha a la bolsa, ¿cuál es la probabilidad de que saque otra ficha verde, roja o blanca? Y si tampoco regresa esa ficha, ¿cuál es la probabilidad de que la tercera ficha sea verde, roja o blanca?  
 c) Si Érik regresa las fichas a la bolsa, ¿cuál es la probabilidad en cada caso?





Consulta las páginas de tu libro de texto de Matemáticas 2 donde se trate el tema “probabilidad teórica”. Busca ejercicios en los que calcules la probabilidad frecuencial y la teórica. Responde y haz lo que se pide en hojas blancas.

- ¿Cuál es la manera de calcular la probabilidad frecuencial y la probabilidad teórica?
- ¿Qué información importante debes tener en cuenta para calcular cada una?
- ¿En qué se diferencian la probabilidad frecuencial y la teórica?
- Reflexiona en tus estrategias para resolver cada ejercicio. Escribe una serie de instrucciones para resolver ejercicios de cada tipo.



**Analiza la situación, responde en hojas blancas y entrégalas a tu profesor. Usa calculadora.**

En una escuela secundaria se acordó hacer una rifa para recaudar fondos. El primero, segundo y tercer premio son \$30 000.00, \$20 000.00 y \$10 000.00, respectivamente. Los boletos están numerados del 000 al 999. Cada boleto cuesta \$100.00.

Los dígitos de los números ganadores se extraerán al azar de tres tómbolas que tienen esferas numeradas del 0 al 9; regresándolas luego a su tómbola respectiva.

- Si los números ganadores del primero, segundo y tercer premio se toman como el tercero, sexto y noveno números que se formen respectivamente, ¿cuál es la probabilidad de ganar el primero, segundo y tercer premio, si compras un boleto? Supón que se regresan las esferas a su tómbola respectiva.
- Si se venden todos los boletos, ¿cuál será la ganancia de la secundaria después de entregar los premios?
- ¿Cuántos boletos tendrías que comprar para tener 50% de probabilidad de ganar el primer premio?, ¿y el segundo?, ¿y el tercero? ¿Cuánto habrás gastado en cada caso?, ¿conviene hacer esto?



La paradoja del cumpleaños establece que si hay veintitrés personas reunidas, sin considerarte a ti, hay una probabilidad  $P$  de 50.72% de que al menos dos personas de ellas cumplan años la misma fecha, sin tener en cuenta años bisiestos y personas gemelas.

- ¿Qué significa la probabilidad de 50.72% en esta situación?
- Haz dos encuestas, una a veinticinco personas ( $P = 56.86\%$ ) y otra a veintisiete ( $P = 62.68\%$ ) acerca de cuándo cumplen años.
- ¿En alguna de las dos encuestas se repite un cumpleaños?
- Consulta con otros compañeros que hayan hecho la encuesta y vean en cuántos casos se repitió algún cumpleaños.
- Usa la información anterior para hacer predicciones que sorprenderán a tus familiares y amigos y sé todo un mago matemático.



Nombre

Grado

Escuela

Maestro (a)



**EDUCACIÓN**  
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



Distribución gratuita  
Prohibida su venta

ISBN 978-607-551-551-9



9 786075 515519

ISBN 978-607-97523-8-5



9 786079 752385



**EDUCACIÓN**  
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA